# G12 : Contrôle continu n° 3.

**Exercice 1.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées ; on suppose $X_1$ de carré intégrable et on note $m = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1)$.

1. Montrer que la suite de terme général

$$\left(\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - m\right), \frac{S_n}{n}\right)$$

converge en loi vers $(G, m)$ où $G$ suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

2. En déduire que la suite de terme général

$$U_n = \sqrt{n}\left(\left(\frac{S_n}{n}\right)^2 - m^2\right)$$

converge en loi vers $U$ de loi $\mathcal{N}(0, 4m^2\sigma^2)$. `On pourra factoriser` $x^2 - y^2$.

**Exercice 2.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$ ; on rappelle que $X_1$ est de carré intégrable, que $\mathbb{E}[X_1] = 0$, que $\mathbb{V}(X_1) = 1$ et que $\mathbb{E}\left[e^{X_1}\right] = e^{1/2}$. On note, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad M_n = \exp\left(S_n - n/2\right).$$

1. (a) Justifier la convergence presque sûre de $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ et préciser la limite.

   (b) En déduire que $(M_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

2. (a) Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbb{E}\left[M_n\right]$.

   (b) La convergence de $(M_n)_{n\geq 1}$ a-t-elle lieu dans $\mathrm{L}^1$ ?

3. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs.

   (a) Montrer que si $\sum_{n\geq 1} a_n^2 < +\infty$ alors la série $\sum_{n\geq 1} a_n X_n$ converge presque sûrement et dans $\mathrm{L}^2$ vers une variable aléatoire réelle dont on précisera la variance.

   (b) Montrer que si la série $\sum_{n\geq 1} a_n X_n$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire réelle alors $\sum_{n\geq 1} a_n^2 < +\infty$. `Pensez à la convergence en loi !`



**`Fin de l'épreuve`**