G12 : Devoir maison n° 2.

À rendre le mardi 28 novembre

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes ; pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_n > 0$. On pose, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad s_n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n.$$

1. Calculer la fonction caractéristique φ_n de S_n. Quelle est la loi de S_n ? sa moyenne ? sa variance ?

2. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire S de $\overline{\mathbf{R}}_+$.

3. On suppose que $\sum_{n\geq 1}\lambda_n < +\infty$. Calculer $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}[S_n]$. En déduire que S est finie presque sûrement et déterminer la loi de S.

4. On suppose désormais que $\sum_{n\geq 1}\lambda_n = +\infty$.

   (a) Montrer que, pour tout $r \in \mathbf{N}$, $\mathbb{P}(S > r) = 1$. Déterminer S.

   (b) Montrer que la suite de terme général $Y_n = (S_n - s_n)/s_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, converge presque sûrement vers 0 lorsque $n \to +\infty$. *On pourra utiliser le lemme de Kronecker et l'inégalité* $s_n^{-2}\lambda_n \leq s_{n-1}^{-1} - s_n^{-1}$, $n \geq 2$.

Lemme de Kronecker : Soient $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ et $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels. Si $\sum_{n\geq 1}(x_n/b_n)$ converge dans $\mathbf{R}$, alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)/b_n = 0$.

   (c) Déterminer la limite en loi de $\left(\sqrt{s_n}\,Y_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées, de carré intégrable, telle que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] = 1$.

Pour $n \geq 1$, on pose

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad R_n = \frac{|S_n|}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que $(R_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on déterminera la densité. Vérifier que $\mathbb{E}[Z] = \sqrt{2}/\sqrt{\pi}$.

Pour $l \geq 1$, on pose $\varphi_l(x) = \min(x, l)\,\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x)$.

2. (a) Justifier que, pour tout $l \geq 1$, $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}[\varphi_l(R_n)] = \mathbb{E}[\varphi_l(Z)]$.

   (b) Établir, pour $l \geq 1$ et $n \geq 1$, les quatre relations suivantes

$$\left|\mathbb{E}[R_n] - \mathbb{E}[\varphi_l(R_n)]\right| \leq \mathbb{E}\left[R_n\,\mathbf{1}_{\{R_n\geq l\}}\right] \leq \frac{1}{l}\,\mathbb{E}\left[R_n^2\right] = \frac{1}{l}.$$

3. (a) Prouver que, pour tout $l \geq 1$,

$$\limsup_{n\to+\infty}\left|\mathbb{E}[R_n] - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right| \leq \frac{1}{l} + \left(\mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[\varphi_l(Z)]\right).$$

   (b) Conclure.