UFR Mathématiques — Master 1^{re} année

Université Rennes I — Année 2006/2007

G12 : Correction rapide du DM2.

Exercice 1. 1. Rappelons que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est $t \longmapsto e^{\lambda(e^{it}-1)}$. Les variables $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ étant indépendantes nous avons

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad \varphi_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{itX_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k\left(e^{it}-1\right)} = e^{s_n\left(e^{it}-1\right)}.$$

S_n suit la loi de Poisson de paramètre s_n : $\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{V}(S_n) = s_n$.

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_n)$; par conséquent, $\mathbb{P}(X_n \geq 0) = 1$. L'événement $\Omega_1 = \cap_{n\geq 1}\{X_n \geq 0\}$ a pour probabilité 1. Pour tout $\omega \in \Omega_1$ et tout $n \geq 1$, $X_n(\omega) \geq 0$: pour tout $\omega \in \Omega_1$, $(S_n(\omega))_{n\geq 1}$ est une suite croissante donc convergente dans $\overline{\mathbf{R}}_+$. Il suffit de poser $S(\omega) = \lim_{n\to+\infty} S_n(\omega)$ si $\omega \in \Omega_1$ et $S(\omega) = 0$ si $\omega \in \Omega_1^c$.

3. Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ étant positives, on a par convergence monotone

$$\mathbb{E}[S] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[S_n] = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\leq n} \lambda_k = \sum_{k\geq 1} \lambda_k < +\infty.$$

S est donc finie presque sûrement puisque que c'est une variable aléatoire intégrable.

S_n converge presque sûrement et donc en loi vers S. Par conséquent, d'après le théorème de Paul Lévy,

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad \varphi_S(t) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = e^{\left(e^{it}-1\right)\sum_{k\geq 1}\lambda_k}.$$

S suit la loi de Poisson de paramètre $\sum_{k\geq 1} \lambda_k$.

4. (a) Pour tout $n \geq 1$, $S \geq S_n$ presque sûrement. Donc pour tout $r \in \mathbf{N}$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbb{P}(S > r) \geq \mathbb{P}(S_n > r) = 1 - \mathbb{P}(S_n \leq r)$. Or, dès que $s_n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(S_n \leq r) = e^{-s_n} \sum_{k\leq r} \left(s_n^k/k!\right) \leq (r+1)\, s_n^r\, e^{-s_n}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$, $\mathbb{P}(S_n \leq r) \longrightarrow 0$ si $n \to +\infty$. Par conséquent, pour tout $r \in \mathbf{N}$, $\mathbb{P}(S > r) = 1$: $S = +\infty$ presque sûrement.

(b) Observons tout d'abord que, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[X_n] = \lambda_n$ et que

$$Y_n = \frac{1}{s_n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) = \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \mathbb{E}[X_k]\right).$$

Puisque la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en croissant vers $+\infty$, il suffit de montrer, en vertu du lemme de Kronecker, que la série de terme général $(X_n - \mathbb{E}[X_n])/s_n$, converge presque sûrement dans $\mathbf{R}$ pour établir la convergence presque sûre vers 0 de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$. Nous avons,

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n - \mathbb{E}[X_n]}{s_n}\right)^2\right] = \sum_{n\geq 1} \frac{\mathbb{V}(X_n)}{s_n^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n}{s_n^2} < +\infty.$$

En effet, la suite $(s_n)_{n\geq 1}$, à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, étant croissante, pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{\lambda_n}{s_n^2} \leq \frac{\lambda_n}{s_n\, s_{n-1}} = \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n},$$

et par conséquent, pour tout $p \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{p+1} \frac{\lambda_n}{s_n^2} \leq \frac{\lambda_1}{s_1^2} + \sum_{n=2}^{p+1} \frac{\lambda_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{\lambda_1} + \sum_{n=2}^{p+1} \left(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n} \right) \leq \frac{2}{\lambda_1}.$$

Les variables aléatoires $(X_n - \mathbb{E}[X_n])/s_n$, $n \geq 1$, sont indépendantes et centrées : le théorème sur les séries centrées donne le résultat.

(c) La fonction caractéristique ψ_n de $\sqrt{s_n} Y_n$ est donnée par

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad \psi_n(t) = \mathbb{E}\left[e^{it\frac{S_n - s_n}{\sqrt{s_n}}} \right] = e^{-it\sqrt{s_n}}\, \varphi_{S_n}\left(t/\sqrt{s_n}\right) = e^{-it\sqrt{s_n}}\, e^{s_n\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{s_n}}} - 1\right)}.$$

Or $e^{i\frac{t}{\sqrt{s_n}}} - 1 = i\frac{t}{\sqrt{s_n}} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{s_n} + \frac{t^2}{s_n}\varepsilon\left(it/\sqrt{s_n}\right)$ avec $\lim_{z\to 0} \varepsilon(z) = 0$. Par conséquent,

$$\psi_n(t) = e^{-it\sqrt{s_n}}\, e^{it\sqrt{s_n} - \frac{t^2}{2} + t^2\,\varepsilon(it/\sqrt{s_n})} = e^{-\frac{t^2}{2} + t^2\,\varepsilon(it/\sqrt{s_n})}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \psi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$; c'est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. D'après le théorème de Paul Lévy, $\left(\sqrt{s_n} Y_n\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable normale centrée réduite.

Exercice 2. 1. Puisque les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. de carré intégrable, on peut appliquer le TCL pour obtenir la convergence en loi de $(S_n/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ vers X de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Comme la fonction $x \longmapsto |x|$ est continue, $(R_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers $Z = |X|$.

Déterminons la densité de Z. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction borélienne et positive. On a, par parité,

$$\mathbb{E}\left[f(Z)\right] = \mathbb{E}\left[f(|X|)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(|x|) e^{-x^2/2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-x^2/2} \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x)\, dx.$$

Z a pour densité $x \longmapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x)$.

Si on prend $f(x) = x$ dans la formule précédente, on obtient

$$\mathbb{E}[Z] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbf{R}_+} x e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-e^{-x^2/2} \right]_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

2. (a) Soit $l \geq 1$. Comme φ_l est continue et bornée sur $\mathbf{R}$, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\varphi_l(R_n)] = \mathbb{E}[\varphi_l(Z)]$ puisque $(R_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers Z.

(b) Soient $l \geq 1$ et $n \geq 1$. Pour tout $x \geq 0$, $0 \leq x - \varphi_l(x) \leq x\mathbf{1}_{x\geq l} \leq x^2 \mathbf{1}_{\{x \geq l\}}/l \leq x^2/l$. Par suite, comme $R_n \geq 0$,

$$\left|\mathbb{E}[R_n] - \mathbb{E}[\varphi_l(R_n)]\right| \leq \mathbb{E}\left[R_n - \varphi_l(R_n)\right] \leq \mathbb{E}\left[R_n \mathbf{1}_{\{R_n \geq l\}}\right] \leq \frac{1}{l}\, \mathbb{E}\left[R_n^2\right].$$

Remarquons $\mathbb{E}\left[R_n^2\right] = \mathbb{E}\left[S_n^2\right]/n$. Comme les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ sont centrées et i.i.d., $\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \mathbb{V}(S_n) = n\mathbb{V}(X_1) = n$. Ceci donne le dernier majorant.

3. (a) On a, pour tout $l \geq 1$ et tout $n \geq 1$, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}[R_n] - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right| &= |\mathbb{E}[R_n] - \mathbb{E}[Z]| \\
&\leq |\mathbb{E}[R_n] - \mathbb{E}[\varphi_l(R_n)]| + |\mathbb{E}[\varphi_l(R_n)] - \mathbb{E}[\varphi_l(Z)]| + |\mathbb{E}[\varphi_l(Z)] - \mathbb{E}[Z]| \\
&\leq \frac{1}{l} + |\mathbb{E}[\varphi_l(R_n)] - \mathbb{E}[\varphi_l(Z)]| + |\mathbb{E}[\varphi_l(Z)] - \mathbb{E}[Z]| \,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $l \geq 1$, comme $x \geq \varphi_l(x)$ pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} \left|\mathbb{E}[R_n] - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right| &\leq \frac{1}{l} + |\mathbb{E}[\varphi_l(Z)] - \mathbb{E}[Z]| + \limsup_{n\to+\infty} |\mathbb{E}[\varphi_l(R_n)] - \mathbb{E}[\varphi_l(Z)]| \\
&= \frac{1}{l} + (\mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[\varphi_l(Z)])
\end{aligned}$$

d'après la question 2. (a).

(b) Comme Z est positive, pour tout $l \geq 1$, $0 \leq \varphi_l(Z) \leq Z$ et $\lim_{l\to+\infty} \varphi_l(Z) = Z$. Z étant intégrable, le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{l\to+\infty} (\mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[\varphi_l(Z)]) = 0.$$

Par conséquent,

$$\limsup_{n\to+\infty} \left|\mathbb{E}[R_n] - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right| \leq \lim_{l\to+\infty} \left(\frac{1}{l} + |\mathbb{E}[\varphi_l(Z)] - \mathbb{E}[Z]|\right) = 0 \ ;$$

finalement, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[R_n] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.