Module PRB1 : Probabilités de base.

Examen 1re session : durée trois heures.

Documents autorisés : polycopié et notes personnelles de cours, table des lois usuelles.

Mardi 13 janvier 2004.

Exercice 1. Soient r un réel strictement positif et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi μ uniforme sur $\left[-r\sqrt{3}, r\sqrt{3}\right]$.

1. (a) Expliciter la densité de la probabilité μ.

(b) Expliquer pourquoi X_1 a des moments de tous les ordres et préciser $\mathbb{E}[X_1]$, $\mathbb{E}\left[X_1^2\right]$ ainsi que la variance de X_1^2.

Pour $n \geq 1$, on pose

$$T_n = \left(\frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Prouver que $(T_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers r.

3. On étudie à présent la convergence en loi de la suite de terme général $U_n = \sqrt{n}\,(T_n - r)$, $n \geq 1$.

(a) On pose, pour tout $n \geq 1$, $V_n = \sqrt{n}\left(T_n^2 - r^2\right)/(2r)$. Montrer que la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle gaussienne centrée de variance $r^2/5$.

(b) En utilisant l'identité

$$x - r = \frac{x^2 - r^2}{2r} - \frac{\left(x^2 - r^2\right)^2}{2r(x+r)^2}, \quad x \geq 0,$$

montrer que $U_n = V_n - W_n$, où W_n est une variable aléatoire réelle telle que

$$0 \leq W_n \leq \frac{\sqrt{n}}{2r^3}\left(T_n^2 - r^2\right)^2.$$

(c) Prouver que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[W_n] = 0$. En déduire que la suite $(W_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.

(d) Conclure que $(U_n)_{n\geq 1}$ converge en loi et identifier sa limite.

 T.S.V.P.

Exercice 2. Si $x \in \mathbb{R}^3$, on désigne par $|x|$ sa norme euclidienne et on note, pour tout $\rho \geq 0$, B_ρ la boule euclidienne fermée de $\mathbb{R}^3$ de centre 0 et de rayon ρ : $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq \rho\}$; on rappelle que le volume V_ρ de B_ρ est $V_\rho = \frac{4}{3}\pi\rho^3$.

1. Soient $R > 0$ et $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires de $\mathbb{R}^3$ indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur B_R c'est à dire de densité $x \longmapsto \mathbf{1}_{B_R}(x)/V_R$.

On pose, pour tout $r \geq 0$,

$$N_{R,n}(r) = \mathbf{1}_{B_r}(X_1) + \ldots + \mathbf{1}_{B_r}(X_n), \qquad D_{R,n} = \inf\{|X_k| : k = 1, \ldots, n\}.$$

(a) Déterminer, pour tout $r \geq 0$, la loi de $\mathbf{1}_{B_r}(X_1)$ puis celle de $N_{R,n}(r)$.

(b) Exprimer, pour $r \geq 0$, $\{D_{R,n} > r\}$ à l'aide de la variable aléatoire $N_{R,n}(r)$.

Soit $d > 0$. On s'intéresse au comportement asymptotique de $N_{R,n}(r)$ lorsque le rapport $\frac{n}{V_R}$ reste constant égal à d. Pour cela, on note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \geq 0$,

$$R_n = \left(\frac{3n}{4\pi d}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad N_n(r) = N_{R_n,n}(r), \qquad D_n = D_{R_n,n},$$

et on fait tendre n vers $+\infty$.

2. (a) Montrer que, pour tout $r > 0$, $N_n(r)$ converge en loi lorsque $n \to +\infty$ vers une variable aléatoire $N(r)$ suivant la loi de Poisson de paramètre dV_r.

(b) En déduire que D_n converge en loi lorsque $n \to +\infty$ vers une variable aléatoire D dont on précisera la fonction de répartition.

(c) Exprimer $\mathbb{E}[D]$ à l'aide de la fonction Γ : pour $s > 0$, $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{s-1}\, e^{-x}\, dx$.

3. Si 0 représente le système solaire, les variables X_i la position des étoiles dans l'univers et d est la densité stellaire, quelle interprétation peut-on donner à D ?

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_n > 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad s_n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n.$$

1. Calculer la fonction caractéristique φ_n de S_n. Quelle est la loi de S_n ? sa moyenne ? sa variance ?

2. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire S de $\overline{\mathbb{R}}_+$.

3. On suppose que $\sum_{n\geq1} \lambda_n < +\infty$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[S_n]$. En déduire que S est finie presque sûrement et déterminer la loi de S.

4. On suppose désormais que $\sum_{n\geq1} \lambda_n = +\infty$.

(a) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S > r) = 1$. Déterminer S.

(b) Montrer que la suite de terme général $Y_n = (S_n - s_n)/s_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge presque sûrement vers 0 lorsque $n \to +\infty$. *On pourra utiliser le lemme de Kronecker et l'inégalité* $s_n^{-2}\,\lambda_n \leq s_{n-1}^{-1} - s_n^{-1}$, $n \geq 2$.

Lemme de Kronecker : Soient $(b_n)_{n\geq1}$ une suite croissante de réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ et $(x_n)_{n\geq1}$ une suite de réels. Si $\sum_{n\geq1} (x_n/b_n)$ converge dans $\mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)/b_n = 0$.

(c) Déterminer la limite en loi de $\left(\sqrt{s_n}\, Y_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque $n \to +\infty$.