

Module PRB1 : Correction de l'examen.

Exercice 1. 1. (a) μ a pour densité la fonction p définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \frac{1}{2r\sqrt{3}} \mathbf{1}_{[-r\sqrt{3}, r\sqrt{3}]}(x).$$

(b) Le support de la fonction p est $[-r\sqrt{3}, r\sqrt{3}]$ donc $\mathbb{P}(|X_1| > r\sqrt{3}) = 0 : |X_1| \leq r\sqrt{3}$ presque sûrement. Par conséquent X_1 a des moments de tous les ordres.

X_1 étant de loi uniforme sur $[-r\sqrt{3}, r\sqrt{3}]$, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}[X_1^n] = \frac{1}{2r\sqrt{3}} \int_{|x| \leq r\sqrt{3}} x^n dx ;$$

pour n impair, on obtient $\mathbb{E}[X_1^n] = 0$ et pour $n \neq 0$ pair,

$$\mathbb{E}[X_1^n] = \frac{1}{(n+1)r\sqrt{3}} (r\sqrt{3})^{n+1} = \frac{(r\sqrt{3})^n}{n+1}.$$

Par suite, $\mathbb{E}[X_1] = 0$, $\mathbb{E}[X_1^2] = \mathbb{V}(X_1) = r^2$, $\mathbb{E}[X_1^4] = 9r^4/5$ et $\mathbb{V}(X_1^2) = 4r^4/5$.

2. Les variables aléatoires $Y_n = X_n^2$ sont indépendantes, identiquement distribuées et possèdent des moments de tous les ordres. D'après la loi forte des grands nombres, la v.a. $T_n^2 = (Y_1 + \dots + Y_n)/n$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}[X_1^2] = r^2$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant continue sur \mathbb{R}_+ , T_n converge presque sûrement vers r .

3. (a) Appliquons le théorème de la limite centrale à la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$: la variable aléatoire $\sqrt{n}(T_n^2 - r^2) = 2rV_n$ converge en loi vers une variable aléatoire G gaussienne centrée dont la variance est égale à $\mathbb{V}(Y_1) = \mathbb{V}(X_1^2) = 4r^4/5$. La fonction $x \mapsto x/(2r)$ étant continue sur \mathbb{R} , V_n converge en loi vers $G/(2r)$ qui est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\mathbb{V}(G)/(4r^2) = r^2/5$.

(b) D'après l'identité rappelée dans l'énoncé,

$$U_n = V_n - \sqrt{n} \frac{(T_n^2 - r^2)^2}{2r(T_n + r)^2} = V_n - W_n.$$

T_n étant une variable aléatoire positive, $T_n + r \geq r$ et $0 \leq W_n \leq \sqrt{n}(T_n^2 - r^2)^2 / (2r^3)$.

(c) Remarquons que $\mathbb{E}[T_n^2] = \mathbb{E}[Y_1] = r^2$. Par conséquent, $\mathbb{E}[(T_n^2 - r^2)^2] = \mathbb{V}(T_n)$. Or nous avons, comme les variables $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont i.i.d.

$$\mathbb{V}(T_n) = \mathbb{V}(n^{-1}(Y_1 + \dots + Y_n)) = n^{-2} n \mathbb{V}(Y_1) = n^{-1} \mathbb{V}(X_1^2) = 4r^4/(5n).$$

Par conséquent, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\mathbb{E}[|W_n|] \leq \frac{\sqrt{n}}{2r^3} \mathbb{V}(T_n) = \frac{2r}{5\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

$(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 dans L^1 et donc à fortiori en probabilité.

(d) Puisque $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers V de loi $\mathcal{N}(0, r^2/5)$ et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la constante 0, le couple (V_n, W_n) converge en loi vers $(V, 0)$ d'après le lemme de Slutsky. La fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} $(x, y) \mapsto x - y$ étant continue, $U_n = V_n - W_n$ converge en loi vers $V - 0 = V$. La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc en loi vers une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0, r^2/5)$.

Exercice 2. 1. (a) Fixons $r \in \mathbb{R}_+$. La variable aléatoire $\mathbf{1}_{B_r}(X_1)$ ne prend que deux valeurs 0 et 1; elle suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X_1 \in B_r)$. On a

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_r) = \frac{1}{V_R} \int_{B_r} \mathbf{1}_{B_R}(x) dx = \frac{1}{V_R} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_{B_r \cap B_R}(x) dx = \frac{V_{R \wedge r}}{V_R} = \frac{(R \wedge r)^3}{R^3}.$$

$N_{R,n}(r)$ est la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $V_{R \wedge r}/V_R$: elle suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, V_{R \wedge r}/V_R)$.

(b) On a $\{D_{R,n} > r\} = \{N_{R,n}(r) = 0\}$.

2. (a) Soit $r \in \mathbb{R}_+$. D'après la question précédente, $N_n(r)$ suit la loi binomiale de paramètres n et $V_{r \wedge R_n}/V_{R_n}$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = +\infty$, pour n assez grand, $r \wedge R_n = r$ et $V_r/V_{R_n} = dV_r/n$. $N_n(r)$ a donc pour fonction caractéristique la fonction $\varphi_{n,r}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{n,r}(t) = \left(\frac{dV_r}{n} e^{it} + \left(1 - \frac{dV_r}{n} \right) \right)^n = \left(1 + (e^{it} - 1) \frac{dV_r}{n} \right)^n.$$

Par conséquent, pour tout réel t , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{n,r}(t) = e^{dV_r(e^{it} - 1)}$. Pour $r > 0$, ceci est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle, disons $N(r)$, suivant la loi de Poisson de paramètre dV_r . D'après le théorème de Paul Lévy, $N_n(r)$ converge donc en loi vers $N(r)$ de loi $\mathcal{P}(dV_r)$ pour $r > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable $N_n(0)$ est presque sûrement nulle. $N_n(0)$ converge donc en loi vers 0.

(b) D'après la question 1. b, on a, pour $r \geq 0$, $\mathbb{P}(D_n > r) = \mathbb{P}(N_n(r) = 0)$. Or, comme $N_n(r)$ ne prend que des valeurs entières, $\mathbb{P}(N_n(r) = 0) = \mathbb{P}(N_n(r) \leq 1/2)$. La fonction de répartition de $N(r)$ est constante sur les intervalles $]n, n + 1[$, $n \in \mathbb{N}$; elle est continue au point $1/2$. Par conséquent, puisque $N_n(r)$ converge en loi vers $N(r)$ pour tout $r > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(N_n(r) = 0) = \mathbb{P}(N(r) \leq 1/2) = \mathbb{P}(N(r) = 0) = e^{-dV_r}$. Pour $r < 0$, $\mathbb{P}(D_n > r) = 1$. Enfin $\mathbb{P}(D_n > 0) = \mathbb{P}(N_n(0) = 0) = 1$. Par suite, la fonction de répartition de D_n , F_{D_n} converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction $(1 - e^{-dV_r}) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(r)$ qui est une fonction de répartition.

(c) Pour finir, nous avons, puisque D est une variable positive,

$$\mathbb{E}[D] = \int_0^{+\infty} e^{-dV_r} dr = \int_0^{+\infty} e^{-d \frac{4\pi}{3} r^3} dr.$$

Le changement de variable $t = d \frac{4\pi}{3} r^3$ conduit à, $dr = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4\pi d} \right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{3}-1} dt$, et

$$\mathbb{E}[D] = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4\pi d} \right)^{\frac{1}{3}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{3}-1} e^{-t} dt = \left(\frac{3}{4\pi d} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \Gamma(1/3) = \left(\frac{3}{4\pi d} \right)^{\frac{1}{3}} \Gamma(4/3).$$

3. Si on suppose que les variables X_i représente la position des étoiles dans l'univers, D est la distance du système solaire à l'étoile la plus proche.

Exercice 3. 1. Rappelons que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est $t \mapsto e^{\lambda(e^{it}-1)}$. Les variables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant indépendantes nous avons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(t) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[e^{itX_k}] = \prod_{k=1}^n e^{\lambda_k(e^{it}-1)} = e^{s_n(e^{it}-1)}.$$

S_n suit la loi de Poisson de paramètre s_n : $\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{V}(S_n) = s_n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_n)$; par conséquent, $\mathbb{P}(X_n \geq 0) = 1$. L'événement $\Omega_1 = \bigcap_{n \geq 1} \{X_n \geq 0\}$ a pour probabilité 1. Pour tout $\omega \in \Omega_1$ et tout $n \geq 1$, $X_n(\omega) \geq 0$: pour tout $\omega \in \Omega_1$, $(S_n(\omega))_{n \geq 1}$ est une suite croissante donc convergente dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Il suffit de poser $S(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\omega)$ si $\omega \in \Omega_1$ et $S(\omega) = 0$ si $\omega \in \Omega_1^c$.

3. Les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant positives, on a par convergence monotone

$$\mathbb{E}[S] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[S_n] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \leq n} \lambda_k = \sum_{k \geq 1} \lambda_k < +\infty.$$

S est donc finie presque sûrement puisque que c'est une variable aléatoire intégrable.

S_n converge presque sûrement et donc en loi vers S . Par conséquent, d'après le théorème de Paul Lévy,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_S(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t) = e^{(e^{it}-1) \sum_{k \geq 1} \lambda_k}.$$

S suit la loi de Poisson de paramètre $\sum_{k \geq 1} \lambda_k$.

4. (a) Pour tout $n \geq 1$, $S \geq S_n$ presque sûrement. Donc pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(S > r) \geq \mathbb{P}(S_n > r) = 1 - \mathbb{P}(S_n \leq r)$. Or, dès que $s_n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(S_n \leq r) = e^{-s_n} \sum_{k \leq r} \left(\frac{s_n^k}{k!} \right) \leq (r+1) s_n^r e^{-s_n}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$, $\mathbb{P}(S_n \leq r) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$. Par conséquent, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S > r) = 1$: $S = +\infty$ presque sûrement.

(b) Observons tout d'abord que, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[X_n] = \lambda_n$ et que

$$Y_n = \frac{1}{s_n} \left(\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \lambda_k \right) = \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}[X_k]).$$

Puisque la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en croissant vers $+\infty$, il suffit de montrer, en vertu du lemme de Kronecker, que la série de terme général $(X_n - \mathbb{E}[X_n])/s_n$, converge presque sûrement dans \mathbb{R} pour établir la convergence presque sûre vers 0 de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Nous avons,

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n - \mathbb{E}[X_n]}{s_n} \right)^2 \right] = \sum_{n \geq 1} \frac{\mathbb{V}(X_n)}{s_n^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_n}{s_n^2} < +\infty.$$

En effet, la suite $(s_n)_{n \geq 1}$, à valeurs dans \mathbb{R}_+^* , étant croissante, pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{\lambda_n}{s_n^2} \leq \frac{\lambda_n}{s_n s_{n-1}} = \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n},$$

et par conséquent, pour tout $p \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{p+1} \frac{\lambda_n}{s_n^2} \leq \frac{\lambda_1}{s_1^2} + \sum_{n=2}^{p+1} \frac{\lambda_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{\lambda_1} + \sum_{n=2}^{p+1} \left(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n} \right) \leq \frac{2}{\lambda_1}.$$

Les variables aléatoires $(X_n - \mathbb{E}[X_n])/s_n$, $n \geq 1$, sont indépendantes et centrées : le théorème sur les séries centrées donne le résultat.

(c) La fonction caractéristique ψ_n de $\sqrt{s_n}Y_n$ est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi_n(t) = \mathbb{E} \left[e^{it \frac{S_n - s_n}{\sqrt{s_n}}} \right] = e^{-it\sqrt{s_n}} \varphi_{S_n}(t/\sqrt{s_n}) = e^{-it\sqrt{s_n}} e^{s_n \left(e^{i \frac{t}{\sqrt{s_n}}} - 1 \right)}.$$

Or $e^{i \frac{t}{\sqrt{s_n}}} - 1 = i \frac{t}{\sqrt{s_n}} - \frac{1}{2} \frac{t^2}{s_n} + \frac{t^2}{s_n} \varepsilon(it/\sqrt{s_n})$ avec $\lim_{z \rightarrow 0} \varepsilon(z) = 0$. Par conséquent,

$$\psi_n(t) = e^{-it\sqrt{s_n}} e^{it\sqrt{s_n} - \frac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon(it/\sqrt{s_n})} = e^{-\frac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon(it/\sqrt{s_n})}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$; c'est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. D'après le théorème de Paul Lévy, $(\sqrt{s_n}Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable normale centrée réduite.