Module G12 : **Probabilités de base.**

Examen 2e session : durée 2 heures.

Documents autorisés : notes personnelles de cours.

Lundi 13 juin 2005.

Exercice 1. Soit α un réel, $0 < \alpha < 2$, et f la densité de probabilité définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{c}{1+|x|^{1+\alpha}}, \quad \text{où } c = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+|x|^{1+\alpha}}\right)^{-1}.$$

On désigne par $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de densité f et on pose, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. (a) Pour quelles valeurs de α la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge-t-elle presque sûrement ?

   (b) Peut-on appliquer le T.C.L. à la suite $(X_n)_{n\geq 1}$?

2. Soit φ la fonction caractéristique de X_1.

   (a) Vérifier que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) - 1 = c \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(tx) - 1}{1+|x|^{1+\alpha}}\, dx,$$

puis établir que, pour $t \neq 0$,

$$\frac{\varphi(t)-1}{|t|^\alpha} = c \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos u - 1}{|t|^{1+\alpha} + |u|^{1+\alpha}}\, du.$$

   (b) Justifier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction γ, $\gamma(u) = \frac{\cos u - 1}{|u|^{1+\alpha}}$, et prouver l'existence d'une constante $c_1 > 0$ telle que $\lim_{t\to 0} |t|^{-\alpha}\left(\varphi(t) - 1\right) = -c_1$.

3. Soit φ_n la fonction caractéristique de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}$.

   (a) Quelle relation existe-t-il entre φ_n et φ ?

   (b) On note log la fonction logarithme néperien sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour t fixé et n assez grand, justifier l'écriture

$$\varphi_n(t) = \exp\left(n \log \varphi\left(\frac{t}{n^{1/\alpha}}\right)\right).$$

   (c) En utilisant l'équivalence de $\log x$ et $x-1$ au voisinage de $x = 1$, montrer que la suite $\left(\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire L dont on explicitera la fonction caractéristique ψ.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $S_0 = T_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $T_n = (1 - X_1) + \ldots + (1 - X_n) = n - S_n$.

1. Préciser la loi des variables aléatoires S_n et T_n. Sont-elles indépendantes ?

2. Soit N une variable aléatoire indépendante des variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad U(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega), \quad V(\omega) = N(\omega) - U(\omega).$$

(a) Justifier l'égalité, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(U = k) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(S_n = k, N = n),$$

et montrer que U suit la loi de Poisson de paramètre λp.

(b) Montrer que, pour $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(U = k, V = l) = \mathbb{P}(N = k + l)\,\mathbb{P}(S_{k+l} = k)$. En déduire que les variables aléatoires U et V sont indépendantes et déterminer la loi de V.

Rappel : la fonction caractéristique de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) = \exp\left\{\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right\}.$$

3. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Poisson de paramètre 1 ; les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes. On note, pour tout $n \geq 1$, $N_n = Y_1 + \ldots + Y_n$, $U_n = S_{N_n}$, $V_n = N_n - U_n$.

(a) Déterminer la loi de N_n et préciser celles de U_n et V_n.

(b) Montrer que la suite $(N_n/n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 1.

(c) En déduire que les suites $(U_n/n)_{n\geq 1}$ et $(V_n/n)_{n\geq 1}$ convergent presque sûrement et précisez leurs limites.

(d) On pose, pour $n \geq 1$,

$$P_n = \frac{U_n - np}{\sqrt{np}}, \quad Q_n = \frac{V_n - n(1-p)}{\sqrt{n(1-p)}}.$$

Montrer que la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire P dont on précisera la loi. Étudier la convergence en loi de $((P_n, Q_n))_{n\geq 1}$.

(e) En déduire la convergence en loi de $(P_n Q_n)_{n\geq 1}$ vers une variable aléatoire réelle dont on déterminera la fonction caractéristique.

Fin de l'épreuve