UFR MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ RENNES 1

Master 1re année
Année 2004/2005

Module G12 : **Correction abrégée de l'examen du 13 juin 2005.**

Exercice 1. 1. (a) D'après la loi forte des grands nombres, la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement dans $\mathbb{R}$ si et seulement si X_1 est intégrable c'est à dire pour $0 < \alpha < 2$.

(b) X_1 n'étant pas de carré intégrable – $x^2 f$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ – on ne peut pas appliquer le TCL.

2. (a) Puisque f est une fonction paire, $\varphi(t) = \int \cos(tx) f(x)\, dx$; on obtient la première formule en notant que $\int f(x)\, dx = 1$. La seconde formule s'obtient via le changement de variable $u = tx$.

(b) La fonction γ est paire et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $|\gamma(u)| = -\gamma(u) \sim \frac{1}{2}\frac{1}{|u|^{\alpha-1}}$ en $u = 0$ et $|\gamma(u)| \leq \frac{2}{|u|^{1+\alpha}}$. Comme $\alpha - 1 < 1$ et $\alpha + 1 > 1$, γ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour $u \neq 0$, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\cos u - 1}{|t|^{1+\alpha}+|u|^{1+\alpha}} = \gamma(u)$. De plus, $\sup_t \left|\frac{\cos u-1}{|t|^{1+\alpha}+|u|^{1+\alpha}}\right| \leq |\gamma(u)|$ qui est intégrable. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - 1}{|t|^\alpha} = c \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos u - 1}{|t|^{1+\alpha} + |u|^{1+\alpha}}\, du = -2c \int_0^{+\infty} |\gamma(u)|\, du.$$

Cette dernière constante est strictement positive puisque $|\gamma|$ n'est pas nulle presque partout.

(c) Les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ étant i.i.d., on a $\varphi_n(t) = \varphi\left[\left(t/n^{1/\alpha}\right)\right]^n$.

(d) Comme φ est continue et $\varphi(0) = 1$, pour t fixé et n assez grand, $\varphi\left(t/n^{1/\alpha}\right) > 0$ ce qui justifie l'écriture.

(e) Fixons $t \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi\left(t/n^{1/\alpha}\right) = 1$, $\log\varphi_n(t) \sim n\left(\varphi\left(t/n^{1/\alpha}\right) - 1\right)$ lorsque n tend vers ∞. D'après la question 2.(b), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \log\varphi_n(t) = -c_1|t|^\alpha$.

D'après le théorème de Paul Lévy, $\left(\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a.r. L dont la fonction caractéristique est $\psi(t) = \exp\left(-c_1|t|^\alpha\right)$.

Exercice 2. 1. S_n suit la loi binomiale de paramètres n et p et T_n celle de paramètre n et $1 - p$. Puisque $S_n + T_n = n$, S_n et T_n ne sont pas indépendantes : en effet si n est un entier non nul, $\mathbb{P}(S_n = 0, T_n = 0) = 0 \neq \mathbb{P}(S_n = 0)\mathbb{P}(T_n = 0) = (1-p)^n p^n$.

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(U = k) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(U = k, N = n) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(S_n = k, N = n) = \sum_{n\geq k} \mathbb{P}(S_n = k, N = n).$$

Puisque S_n et N sont indépendantes,

$$\mathbb{P}(U = k) = \sum_{n\geq k} \mathbb{P}(S_n = k)\, \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n\geq k} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \ldots = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}.$$

U suit la loi de Poisson de paramètre λp.

(b) De la même manière, pour $(k, l) \in \mathbb{N}^*$, par définition de U et V,

$$\mathbb{P}(U = k, V = l) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(S_n = k, n - S_n = l, N = n) = \mathbb{P}(N = k + l, S_{k+l} = k),$$

et par indépendance de S_{k+l} et N

$$\mathbb{P}(U = k, V = l) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+l}}{(k+l)!} \frac{(k+l)!}{k!\,l!} p^k (1-p)^l = e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \frac{(1-p)^l}{l!}.$$

U et V sont donc indépendante puisque le terme ci-dessus est « à variables séparées ».
Sommant en k, on montre que V suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.

3. (a) Les v.a.r. $(Y_n)_{n\geq 1}$ étant i.i.d. suivant la loi $\mathscr{P}(1)$, N_n suit la loi $\mathscr{P}(n)$ – cf. la fonction caractéristique. D'après la question précédente, U_n et V_n sont indépendantes et suivent les lois de Poisson de paramètres respectifs np et $n(1-p)$.

(b) D'après la loi des grands nombres $(N_n/n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[Y_1] = 1$.

(c) On a

$$\frac{U_n}{n} = \frac{N_n}{n} \frac{S_{N_n}}{N_n}$$

et le premier facteur tend presque sûrement vers 1. En particulier, la suite $(N_n)_{n\geq 1}$ croît presque sûrement vers $+\infty$. Soit Ω_1 tel que $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ et $N_n(\omega) \uparrow +\infty$ pour tout $\omega \in \Omega_1$. D'après la loi forte des grands nombres, il existe Ω_2 tel que $\mathbb{P}(\Omega_2) = 1$ et $S_n(\omega)/n \longrightarrow \mathbb{E}[X_1] = p$. On a $\mathbb{P}(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 1$ et si $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, $\lim_{n\to+\infty} S_{N_n(\omega)}(\omega)/N_n(\omega) = p$. La suite $(U_n/n)_{n\geq 1}$ converge donc presque sûrement vers p. On montre de même que $(V_n/n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers $1-p$.

(d) U_n suivant la loi de Poisson de paramètre np, un calcul élémentaire donne, pour tout t,

$$\varphi_{P_n}(t) = e^{-it\sqrt{np}} \exp\left\{np\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{np}}} - 1\right)\right\} = e^{-it\sqrt{np}} \exp\left\{np\left(i\frac{t}{\sqrt{np}} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{np} + \frac{t^2}{np}\varepsilon(t/\sqrt{np})\right)\right\}.$$

Par suite, $\varphi_{P_n}(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t/\sqrt{np}\right) \longrightarrow \exp\left(-\frac{t^2}{2})\right)$. D'après le théorème de Paul Lévy, $(P_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
On montre de la même façon que $(Q_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Passons à la convergence en loi du couple. Puisque U_n et V_n sont indépendantes, il en est de même de P_n et Q_n. Par conséquent, pour $(s,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\phi_{(P_n,Q_n)}(s,t) = \varphi_{P_n}(s)\,\varphi_{Q_n}(t) \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Le théorème de Paul Lévy montre que $\big((P_n,Q_n)\big)_{n\geq 1}$ converge en loi vers (P,Q) où P et Q sont indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

(e) La fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ $(x,y) \longmapsto xy$ étant continue, $(P_nQ_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers PQ. Puisque P et Q sont indépendantes nous avons, pour tout réel t, via le théorème de Fubini,

$$\varphi_{PQ}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{itxy} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dx\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} \varphi_P(ty)\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-\frac{t^2y^2}{2}}\,dy.$$

Par conséquent, notant $\sigma^2 = 1/(1+t^2)$,

$$\varphi_{PQ}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

puisque l'on reconnait la densité de la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.