UFR Mathématiques — Master 1re année
Université Rennes I — Année 2005/2006

Module G12 : Probabilités de base.

Examen 1re session : durée deux heures.

Documents autorisés : polycopié et notes personnelles de cours.

Mardi 20 décembre 2005.

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées, de carré intégrable ; on note $m = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1) > 0$.

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad M_n = \frac{S_n}{n}, \qquad T_n = \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - m\right).$$

1. (a) Justifier brièvement la convergence en loi de la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ et préciser la limite.

   (b) Montrer que la suite $(M_n + m)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers $2m$.

   (c) En déduire que la suite $\left(\sqrt{n}\,(M_n^2 - m^2)\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable au point m.

   (a) Justifier l'écriture

$$f(M_n) = f(m) + (M_n - m)\,f'(m) + (M_n - m)\,\varepsilon(M_n - m), \qquad \text{où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

   (b) Montrer que la suite $\left(\sqrt{n}(M_n - m)\,\varepsilon(M_n - m)\right)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.

   (c) En déduire que la suite $\left(\sqrt{n}\,(f(M_n) - f(m))\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi. Retrouve-t-on le résultat de la question 1. (c) ?

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées. Pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et on pose $S_0 = 0$. On note $\lambda = \mathbb{E}[X_1]$ et on suppose que $\lambda \in]0, +\infty]$.

On définit, pour tout $t \geq 0$,

$$N_t = \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\} \in [0, +\infty].$$

1. En utilisant la loi des grands nombres, montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ presque sûrement. En déduire que, presque sûrement, $N_t < +\infty$ pour tout $t \geq 0$.

2. (a) Montrer que $\mathbb{P}(X_1 > 0) > 0$ et en déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathbb{P}(X_1 > \alpha) > 0$.

(b) Soient $t \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $k\alpha > t$. Établir que

$$\mathbb{P}(S_k > t) \geq \mathbb{P}(S_k > k\alpha) \geq \mathbb{P}(X_1 > \alpha)^k.$$

puis que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(S_{nk} \leq t) \leq \mathbb{P}\left(S_k \leq t, S_{2k} - S_k \leq t, \ldots, S_{nk} - S_{(n-1)k} \leq t\right) \leq \mathbb{P}(S_k \leq t)^n.$$

(c) En remarquant que, pour tous $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, $\{N_t \geq n\} = \{S_n \leq t\}$, montrer que N_t est intégrable pour tout $t \geq 0$.

3. (a) Montrer que, presque sûrement, $\lim_{t\to+\infty} N_t = +\infty$ et en déduire que

$$\text{presque sûrement,} \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \lambda.$$

(b) En remarquant que $S_{N_t} \leq t \leq S_{N_t+1}$, montrer que $\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\lambda}$ presque sûrement.

4. On suppose désormais que X_1 est intégrable.

(a) Montrer que X_n et $\mathbf{1}_{N_t+1\geq n}$ sont indépendantes et en déduire que

$$\mathbb{E}\left[S_{N_t+1}\right] = \mathbb{E}\left[\sum\nolimits_{n\geq 1} X_n \, \mathbf{1}_{N_t+1\geq n}\right] = \mathbb{E}[X_1]\, \mathbb{E}[N_t + 1],$$

puis que $\liminf_{t\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[N_t]}{t} \geq \frac{1}{\lambda}$.

(b) On suppose dans cette question qu'il existe $a \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$, $X_n \leq a$. Montrer que $\limsup_{t\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[N_t]}{t} \leq \frac{1}{\lambda}$.

(c) Établir que $\limsup_{t\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[N_t]}{t} \leq \frac{1}{\lambda}$ dans le cas général. Indic. : on pourra introduire les variables $\min(X_n, a)$.

(d) En déduire que $\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[N_t]}{t} = \frac{1}{\lambda}$.