UFR Mathématiques — Master 1re année
Université Rennes I — Année 2005/2006

Module G12 : Correction rapide de l'examen.

Exercice 1. 1. (a) Les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. et de carré intégrable ; d'après le TCL la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers G de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

(b) D'après la loi forte des grands nombres, $(M_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers m. Le résultat s'en suit immédiatement.

(c) On a, pour tout $n \geq 1$, $\sqrt{n}\left(M_n^2 - m^2\right) = T_n \times (M_n + m)$. $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et $(M_n+m)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement donc en probabilité vers la constante $2m$. D'après le lemme de Slutsky la suite $((T_n, M_n+m))_{n\geq 1}$ converge en loi vers $(G, 2m)$ et la continuité de l'application $(x,y) \longmapsto xy$ implique la convergence en loi de la suite $(T_n(M_n+m))_{n\geq 1}$ vers $2m\,G$ de loi $\mathcal{N}(0, 4m^2\sigma^2)$ si $m \neq 0$, et nulle si $m = 0$.

2. (a) La fonction f est dérivable au point m, elle possède donc un développement limité à l'ordre 1 en ce point.

(b) La suite $(\varepsilon(M_n - m))_{n\geq 1}$ converge presque sûrement et par conséquent en probabilité vers la constante 0. Comme $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers G, le lemme de Slutsky donne la convergence en loi de la suite $(T_n\varepsilon(M_n-m))_{n\geq 1}$ vers 0 ; puisque la variable limite est constante, la convergence a lieu également en probabilité.

(c) Par continuité de l'application $x \longmapsto f'(m)\,x$, la suite $(T_n\, f'(m))_{n\geq 1}$ converge en loi vers $f'(m)\,G$ qui est de loi $\mathcal{N}\left(0, (f'(m))^2\ \sigma^2\right)$ si $f'(m) \neq 0$, nulle sinon. Le lemme de Slutsky donne la convergence en loi vers $(f'(m)\,G, 0)$ de la suite $((T_n\, f'(m), T_n\varepsilon(M_n-m)))_{n\geq 1}$. L'application $(x,y) \longmapsto x+y$ étant continue, $(\sqrt{n}(f(M_n) - f(m)))_{n\geq 1}$ converge en loi vers $f'(m)\,G$.

On retrouve bien évidemment le résultat de la question 1. (c) en prenant $f(x) = x^2$.

Exercice 2. 1. Les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. et positives. Si $\lambda \in]0,+\infty[$, X_1 est intégrable et on peut appliquer la loi forte des grands nombres : $\frac{S_n}{n} \longrightarrow \lambda$ p.s. Comme $\lambda > 0$, $S_n \longrightarrow +\infty$ p.s. Si $\lambda = +\infty$, S_n/n converge presque sûrement vers $+\infty$ et S_n aussi.

Lorsque $\lim_{n\to+\infty} S_n(\omega) = +\infty$, pour tout $t \geq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_{n+1}(\omega) > t$: $N_t(\omega) \leq n$. Donc p.s., pour tout $t \geq 0$, $N_t < +\infty$.

2. (a) Si X_1 est nulle p.s. alors $\mathbb{E}[X_1] = 0$. Or $\lambda > 0$ donc X_1 étant positive, $\mathbb{P}(X_1 > 0) > 0$. De plus, $\{X_1 > 0\} = \cup_{n\geq 0}\{X_1 > 2^{-n}\}$ et

$$0 < \mathbb{P}(X_1 > 0) \leq \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\left(X_1 > 2^{-n}\right) \ ;$$

il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(X_1 > 2^{-n}) > 0$ et il suffit de poser $\alpha = 2^{-n}$.

(b) $\{X_1 > \alpha\} \cap \ldots \cap \{X_k > \alpha\} \subset \{S_k > k\alpha\}$ et puisque $k\alpha > t$, les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ étant i.i.d.,

$$\mathbb{P}(S_k > t) \geq \mathbb{P}(S_k > k\alpha) \geq \mathbb{P}(X_1 > \alpha)^k.$$

Soit $n \geq 1$; comme les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ sont positives,

$$\{S_{nk} \leq t\} = \{S_k \leq t\} \cap \ldots \{S_{nk} \leq t\} \subset \{S_k \leq t\} \cap \{S_{2k} - S_k \leq t\} \cap \ldots \cap \{S_{nk} - S_{(n-1)k} \leq t\},$$

et puisque les variables S_k, $S_{2k}-S_k$, $\ldots$, $S_{nk}-S_{(n-1)k}$ sont i.i.d. $\mathbb{P}(S_{nk}\leq t)\leq \mathbb{P}(S_k\leq t)^n$.

(c) Soit $t\geq 0$. Posons $k=[t/\alpha]+1$ de sorte que $k\alpha>t$. Pour tout $n\geq 1$,

$$\mathbb{P}(N_t\geq kn)=\mathbb{P}(S_{nk}\leq t)\leq \mathbb{P}(S_k\leq t)^n\ ;$$

or $\mathbb{P}(S_k\leq t)\leq 1-\mathbb{P}(X_1>\alpha)^k<1$ et $\sum \mathbb{P}(N_t\geq kn)<+\infty$. N_t/k est intégrable et par conséquent N_t l'est aussi.

3. (a) Pour tout $\omega\in\Omega$, $N_t(\omega)\geq n$ dès que $t\geq S_n(\omega)$. D'où $\lim_{t\to+\infty}N_t(\omega)=+\infty$ p.s.

D'après la loi forte des grands nombres (ou un corollaire pour les v.a. positives non-intégrables), les v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ étant i.i.d. positives, il existe $\Omega_1\in\mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(\Omega_1)=1$ et $S_n(\omega)/n\longrightarrow\lambda$ pour tout $\omega\in\Omega_1$. De plus, il existe $\Omega_2\in\mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(\Omega_2)=1$ et $N_t(\omega)\longrightarrow+\infty$ si $t\to+\infty$ pour tout $\omega\in\Omega_2$.

On a alors $\mathbb{P}(\Omega_1\cap\Omega_2)=1$ et pour tout $\omega\in\Omega_1\cap\Omega_2$, $\lim_{t\to+\infty}\frac{S_{N_t(\omega)}(\omega)}{N_t(\omega)}=\lambda$. Donc p.s. $\lim_{t\to+\infty}\frac{S_{N_t}}{N_t}=\lambda$.

(b) Par définition on a $S_{N_t}\leq t<S_{N_t+1}$ et par suite si $N_t\neq 0$,

$$\frac{S_{N_t}}{N_t}\leq\frac{t}{N_t}\leq\frac{S_{N_t+1}}{N_t+1}\frac{N_t+1}{N_t}$$

et comme $N_t\to+\infty$ presque sûrement on obtient $\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{N_t}=\lambda$ p.s.

4. (a) D'après ce qui précède, $\{N_t+1\geq n\}=\{S_{n-1}\leq t\}$. Cet événement appartient à la tribu $\sigma(X_1,\ldots,X_{n-1})$ qui est indépendante de la tribu engendrée par X_n puisque les variables $(X_k)_{k\geq 1}$ sont indépendantes.

Par définition, nous avons,

$$S_{N_t+1}=\sum_{k=1}^{N_t+1}X_k=\sum_{k\geq 1}X_k\,\mathbf{1}_{N_t+1\geq k},$$

et d'après la remarque précédente, comme les variables $(X_k)_{k\geq 1}$ sont positives et identiquement distribuées,

$$\mathbb{E}\left[S_{N_t+1}\right]=\sum_{k\geq 1}\mathbb{E}\left[X_k\,\mathbf{1}_{N_t+1\geq k}\right]=\mathbb{E}\left[X_1\right]\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(N_t+1\geq k)=\mathbb{E}\left[X_1\right]\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}(N_t+1>k).$$

Remarquons que puisque N_t+1 est une variable entière $\mathbb{E}[N_t+1]=\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}(N_t+1>k)$ ce qui donne la relation demandée.

Finalement, $S_{N_t+1}\geq t$ p.s. et donc $\mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N_t+1]\geq t$; par conséquent $\mathbb{E}[N_t]\geq t/\lambda-1$ et $\liminf_{t\to+\infty}\mathbb{E}[N_t]/t\geq 1/\lambda$.

(b) Remarquons à présent que $S_{N_t+1}=S_{N_t}+X_{N_t+1}\leq t+a$; par suite, $\lambda\,\mathbb{E}[N_t+1]\leq t+a$ d'où l'on déduit immédiatement que $\limsup_{t\to+\infty}\mathbb{E}[N_t]/t\leq 1/\lambda$.

(c) Soit $a\in\mathbb{N}^*$. Notons $S_n^a=\min(X_1,a)+\ldots+\min(X_n,a)$ et $N_t^a=\sup\{n\in\mathbb{N}:S_n^a\leq t\}$. On a $0<\lambda^a:=\mathbb{E}[\min(X_1,a)]<+\infty$. On a $\limsup_{t\to+\infty}\mathbb{E}\left[N_t^a\right]/t\leq 1/\lambda^a$ d'après la question précédente. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n^a\leq S_n$ et par conséquent, pour tout $t\geq 0$, $N_t\leq N_t^a$. Donc $\limsup_{t\to+\infty}\mathbb{E}[N_t]/t\leq 1/\lambda^a$. D'autre part, par convergence monotone $\lim_{a\to+\infty}\lambda^a=\lambda$ d'où l'on déduit que $\limsup_{t\to+\infty}\mathbb{E}[N_t]/t\leq 1/\lambda$.

(d) Il résulte des questions 4. (a) et (c) que $\lim_{t\to+\infty}\mathbb{E}[N_t]/t=1/\lambda$.