UFR Mathématiques — Master 1re année
Université Rennes I — Année 2006/2007

Module G12 : Probabilités de base.

Examen 1re session : durée deux heures.

Documents autorisés : polycopié et notes personnelles de cours, liste des lois usuelles.

Lundi 18 décembre 2006.

Exercice 1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $[0,1]$; U_1 a pour densité $x \longmapsto \mathbf{1}_{[0,1](x)}$ et pour fonction de répartition $F(t) = t\,\mathbf{1}_{[0,1[}(t) + \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t)$.

1. On note, pour tout $n \geq 1$,

$$Y_n = (U_n)^n, \quad V_n = \sup\{Y_k : 1 \leq k \leq n\}, \quad W_n = \sup\{Y_{2^k} : 1 \leq k \leq n\}, \quad h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

et $V = \sup\{Y_k : k \geq 1\}$, $W = \sup\{Y_{2^k} : k \geq 1\}$. On rappelle que $h_n \sim \ln n$.

(a) Déterminer, pour tout $n \geq 1$, la fonction de répartition F_n de Y_n.

(b) Calculer, pour tout $n \geq 1$, les fonctions de répartition, H_n et G_n, de V_n et W_n.

(c) Soit t un réel. Comparer les événements $\{V \leq t\}$ et $\cap_{n\geq 1}\{V_n \leq t\}$.
En déduire que $V = 1$ presque sûrement.

(d) Montrer que W suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

(e) Montrer que la suite de terme général $(1 - V_n)\ln n$ converge en loi vers T de loi exponentielle de paramètre 1.

2. Soit $\psi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction borélienne. On note

$$I = \int_0^1 \psi(x)\,dx, \qquad X_n = \mathbf{1}_{\{U_{2n-1}<\psi(U_{2n})\}} = \begin{cases} 1, & \text{si } U_{2n-1} < \psi(U_{2n}) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}, \quad n \geq 1.$$

(a) Montrer que la suite de terme général

$$I_n = \frac{1}{n}\left(\psi(U_1) + \ldots + \psi(U_n)\right)$$

converge presque sûrement et préciser sa limite.

(b) Montrer que les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

(c) Déterminer la loi de X_1 et en déduire que la suite de terme général

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\left(X_1 + \ldots + X_n\right)$$

converge presque sûrement ; préciser la limite.

(d) Comparer $\mathbb{V}(\psi(U_1))$ et $\mathbb{V}(X_1)$. Quelle approximation de I vous semble la meilleure ?

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, de carré intégrable telle que $\mathbb{E}[X_1] = 0$, $\mathbb{V}(X_1) = 1$. On note, pour tout $n \geq 1$,

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{2n} X_k$$

et on désigne par ψ_n la fonction caractéristique de Y_n et par φ celle de X_1.

1. Justifier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

2. (a) Exprimer la fonction caractéristique de $Z_n - Y_n$ à l'aide de ψ_n. Que vaut ψ_n en fonction de φ ?

(b) Montrer que la suite de terme général $(Y_n, Z_n - Y_n)$ converge en loi vers (Y, G) où Y et G sont indépendantes et identiquement distribuées.

(c) En déduire que $((Y_n, Z_n))_{n\geq 1}$ converge en loi vers (Y, Z) dont on explicitera la loi.

Exercice 3. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[0, +\infty[$. On note, pour tout $n \geq 1$, $Z_n = \frac{Y_n}{1+Y_n}$ et on désigne par A l'événement

$$A = \left\{ \omega \in \Omega : \sum_{k\geq 1} Y_k(\omega) < +\infty \right\}.$$

On considère également $(c_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $[0, +\infty[$ telle que X_1 a pour densité $x \longmapsto \frac{1}{x^2}\mathbf{1}_{x\geq 1}$; on note B l'événement

$$B = \left\{ \omega \in \Omega : \sum_{k\geq 1} c_k\, X_k(\omega) < +\infty \right\}.$$

1. Quelles valeurs peuvent prendre $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$?

2. (a) Calculer, pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{P}(c_k X_k \geq 1)$.

(b) En déduire que si $\sum_{k\geq 1} c_k = +\infty$, $\mathbb{P}\left(\limsup\{c_n X_n \geq 1\}\right) = 1$ et $\mathbb{P}(B) = 0$.

3. (a) Montrer que si $\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[Z_k] < +\infty$ alors $\mathbb{P}(A) = 1$.

(b) Montrer que si $\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[Z_k] = +\infty$, la suite de terme général

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} Z_k}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[Z_k]}$$

converge vers 1 dans L^2.

En déduire que dans ce cas $\mathbb{P}(A) = 0$.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{P}(B) = 1$.