G12 : Correction rapide de l'examen.

Exercice 1. 1. (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a $\mathbb{P}(U_n \in]0,1[) = 1$. Par conséquent, $\mathbb{P}(Y_n \in]0,1[) = 1$ et $F_n(t) = 0$ pour tout $t \leq 0$, $F_n(t) = 1$ pour $t \geq 1$. Si $t \in]0,1[$, comme les $(U_n)_{n\geq 1}$ sont identiquement distribuées,

$$F_n(t) = \mathbb{P}\left(U_1^n \leq t\right) = \mathbb{P}\left(U_1 \leq t^{1/n}\right) = t^{1/n}.$$

(b) Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}$. Puisque les variables $(U_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes les $(Y_n)_{n\geq 1}$ le sont aussi et

$$H_n(t) = \mathbb{P}(V_n \leq t) = \mathbb{P}(Y_1 \leq t, \ldots, Y_n \leq t) = F_1(t) \ldots F_n(t) \;;$$

en particulier, pour $0 < t < 1$, $H_n(t) = t\, t^{1/2} \ldots t^{1/n} = t^{h_n}$ et $H_n(t) = t^{h_n}\, \mathbf{1}_{[0,1[}(t) + \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t)$.

De la même manière, $G_n(t) = F_2(t)F_4(t) \ldots F_{2^n}(t)$. Comme $1/2 + 1/4 + \ldots + 1/2^n = 1 - 2^{-n}$, on a $G_n(t) = t^{1-2^{-n}}$ pour $0 < t < 1$ et finalement $G_n(t) = t^{1-2^{-n}}\, \mathbf{1}_{[0,1[}(t) + \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t)$.

(c) Puisque $V = \sup_{n\geq 1} V_n$, on a $\{V \leq t\} = \cap_{n\geq 1}\{V_n \leq t\}$. Pour tout $n \geq 1$, $V_n \leq V_{n+1}$ et donc $\{V_{n+1} \leq t\} \subset \{V_n \leq t\}$. Par conséquent, comme $\lim_{n\to+\infty} h_n = +\infty$, pour tout réel t,

$$\mathbb{P}(V \leq t) = \lim_{n\to+\infty} H_n(t) = \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t).$$

Par suite, $\mathbb{P}(V = 1) = 1$.

(d) De la même manière, $\mathbb{P}(W \leq t) = \lim_{n\to+\infty} G_n(t) = F(t)$. W suit la loi uniforme sur $[0,1]$ puisque deux variables aléatoires ayant même fonction de répartition sont égales en loi.

(e) Soit $t \in \mathbf{R}$. On a, pour $n \geq 2$, comme H_n est continue,

$$\mathbb{P}(\ln n(1 - V_n) \leq t) = \mathbb{P}\left(V_n \geq 1 - \frac{t}{\ln n}\right) = \mathbb{P}\left(V_n > 1 - \frac{t}{\ln n}\right) = 1 - H_n\left(1 - \frac{t}{\ln n}\right).$$

Si $t \leq 0$, pour tout $n \geq 2$, $1 - H_n\left(1 - \frac{t}{\ln n}\right) = 0$. Si $t > 0$, pour $n > e^t$, $0 < 1 - \frac{t}{\ln n} < 1$ et $H_n\left(1 - \frac{t}{\ln n}\right) = \left(1 - \frac{t}{\ln n}\right)^{h_n} = e^{h_n \ln\left(1 - \frac{t}{\ln n}\right)}$. Comme $h_n \sim \ln n$, $\lim_{n\to+\infty} H_n\left(1 - \frac{t}{\ln n}\right) = e^{-t}$ pour $t > 0$. Finalement, pour tout réel t,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\ln n(1 - V_n) \leq t) = \mathbb{P}(T \leq t) \;;$$

$(\ln n(1 - V_n))_{n\geq 1}$ converge en loi vers T.

2. (a) Les variables aléatoires $(\psi(U_n))_{n\geq 1}$ sont i.i.d. puisque les $(U_n)_{n\geq 1}$ le sont. D'autre part, $\psi(U_1)$ est intégrable puisque $0 \leq \psi(U_1) \leq 1$. La loi forte des grands nombres assure la convergence presque sûre de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ vers $\mathbb{E}\left[\psi(U_1)\right] = I$ puisque U_1 suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

(b) Notons h la fonction borélienne de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ $h(x,y) = \mathbf{1}_{x<\psi(y)}$ de sorte que, pour tout $n \geq 1$, $X_n = h(U_{2n-1}, U_{2n})$. Puisque les ensembles $I_n = \{2n-1, 2n\}$, $n \geq 1$, forment une partition de $\mathbf{N}^*$, l'indépendance des variables $(U_n)_{n\geq 1}$ entraîne l'indépendance des tribus $\sigma(U_{2n-1}, U_{2n})$, $n \geq 1$. Comme, pour tout $n \geq 1$, $X_n = h(U_{2n-1}, U_{2n})$ est $\sigma(U_{2n-1}, U_{2n})$–mesurable, les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes. D'autre part, comme les $(U_{n\geq 1})$ sont i.i.d., pour tout $n \geq 1$, (U_{2n-1}, U_{2n}) a pour densité $(x,y) \longmapsto \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\, \mathbf{1}_{[0,1]}(y)$. Par conséquent, les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont identiquement distribuées suivant la loi de $X_1 = h(U_1, U_2)$.

(c) X_1 suit une loi de Bernoulli puisqu'elle est à valeurs dans $\{0,1\}$. De plus, par Tonelli,

$$\mathbb{P}(X_1=1)=\mathbb{P}(U_{2n-1}<\psi(U_{2n}))=\iint_{[0,1]^2}\mathbf{1}_{x<\psi(y)}\,dxdy=\int_0^1\left(\int_0^1\mathbf{1}_{x<\psi(y)}\,dx\right)=\int_0^1\psi(y)\,dy.$$

Les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont donc i.i.d. suivant la loi $\mathcal{B}(I)$.

En particulier, X_1 est intégrable et la loi forte des grands nombres donne la convergence presque sûre de $\left(\overline{X}_n\right)_{n\geq 1}$ vers $\mathbb{E}[X_1]=I$.

3. Les variables aléatoires $\psi(U_1)$ et X_1 sont bornées donc de carré intégrable. Puisque U_1 suit la loi uniforme sur $[0,1]$ et X_1 la loi de Bernoulli de paramètre I on a

$$\mathbb{V}(\psi(U_1))=\int_0^1\psi^2(x)\,dx-I^2,\qquad\text{et}\qquad\mathbb{V}(X_1)=I-I^2.$$

Comme ψ est à valeurs dans $[0,1]$, $\mathbb{V}(\psi(U_1))\leq\mathbb{V}(X_1)$.

Les variables aléatoires $(\psi(U_n))_{n\geq 1}$ sont i.i.d. et de carré intégrable ; il en est de même des variables $(X_n)_{n\geq 1}$. Si $\varepsilon>0$, l'inégalité de Tchebycheff donne

$$\mathbb{P}(|I_n-I|>\varepsilon)\leq\frac{\mathbb{V}(I_n)}{\varepsilon^2}=\frac{\mathbb{V}(\psi(U_1))}{n\varepsilon^2},\quad\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n-I\right|>\varepsilon\right)\leq\frac{\mathbb{V}(X_1)}{n\varepsilon^2}.$$

Au vue de ces majorations, il vaut mieux choisir la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ pour approcher I.

D'autre part, le TCL donne pour tout $t>0$, notant $\sigma=\sqrt{\mathbb{V}(\psi(U_1))}$ et $\sigma'=\sqrt{\mathbb{V}(X_1)}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(|I_n-I|>\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|I_n-I|>\frac{t}{\sqrt{\sigma}}\right)=2\left(1-\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{\sigma}}\right)\right)$$

où $\Phi(t)=\int_{-\infty}^t e^{-x^2/2}dx/\sqrt{2\pi}$, de même que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n-I\right|>\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma'}\left|\overline{X}_n-I\right|>\frac{t}{\sqrt{\sigma'}}\right)=2\left(1-\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{\sigma'}}\right)\right).$$

Comme $\sigma\leq\sigma'$ et Φ est croissante, $2(1-\Phi(t/\sqrt{\sigma}))\leq 2(1-\Phi(t/\sqrt{\sigma'}))$. Il vaux mieux choisir I_n puisque la probabilité pour que I_n s'écarte de I de $t/\sqrt{n}$ est plus petite que celle pour que $\overline{X}_n$ dévie de I de la même quantité pour n assez grand.

Exercice 2. 1. Les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ étant i.i.d. et de carré intégrable, le théorème limite central implique la convergence en loi de $(Y_n)_{n\geq 1}$ vers Y de loi $\mathcal{N}(0,1)$ puisque X_1 est centrée et de variance 1.

2. (a) Pour tout $n\geq 1$, $(X_1,\ldots,X_n)$ et $(X_{n+1},\ldots,X_{2n})$ sont indépendantes et identiquement distribuées suivant $\mathbb{P}_{X_1}^{\otimes n}$. $Y_n=n^{-1/2}\sum_{k=1}^n X_k$ et $Z_n-Y_n=n^{-1/2}\sum_{k=n+1}^{2n}X_k$ sont également i.i.d. et possèdent en particulier la même fonction caractéristique ψ_n.

D'autre part, les $(X_n)_{n\geq 1}$ étant i.i.d., pour tout réel t,

$$\psi_n(t)=\mathbb{E}\left[\prod\nolimits_{1\leq k\leq n}e^{itX_k/\sqrt{n}}\right]\overset{i.}{=}\prod\nolimits_{1\leq k\leq n}\mathbb{E}\left[e^{itX_k/\sqrt{n}}\right]\overset{i.d.}{=}\mathbb{E}\left[e^{itX_1/\sqrt{n}}\right]^n=\varphi(t/\sqrt{n})^n.$$

(b) Comme déjà dit, Y_n et Z_n-Y_n sont i.i.d. Par suite, si s et t sont deux réels,

$$\mathbb{E}\left[e^{isY_n+it(Z_n-Y_n)}\right]=\mathbb{E}\left[e^{isY_n}\right]\mathbb{E}\left[e^{it(Z_n-Y_n)}\right]=\psi_n(s)\psi_n(t)$$

D'après le théorème de Paul Lévy, pour tout réel t, $\psi_n(t) \longrightarrow e^{-t^2/2}$, puisque $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers Y de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[e^{isY_n+it(Z_n-Y_n)}\right] = e^{-s^2/2}e^{-t^2/2} = e^{-(s^2+t^2)/2}$$

qui est la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(0,I_2)$ c'est à dire la loi de (Y,G) où (Y,G) sont i.i.d. suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Via le théorème de Paul Lévy, $\left((Y_n, Z_n - Y_n)\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers (Y,G) i.i.d. suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

(c) Observons que

$$\begin{pmatrix} Y_n \\ Z_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} Y_n \\ Z_n - Y_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme un endomorphsime de $\mathbf{R}^2$ est continu, la suite de terme général $(Y_n, Z_n)^*$ converge en loi vers $(Y,Z)^* = A(Y,G)^*$. Puisque (Y,G) suit la loi $\mathcal{N}(0,I_2)$, (Y,Z) est une vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma = AI_2A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. 1. A est un événement asymptotique de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ puisque, pour tout $r \geq 1$, $A = \{\omega \in \Omega : \sum_{k\geq r} Y_k(\omega) < +\infty\}$. Comme les variables $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes, il résulte de la loi du tout rien de Kolmogorov que $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1. De même pour $\mathbb{P}(B)$.

2. (a) Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On a, si $c_k > 0$,

$$\mathbb{P}(c_kX_k \geq 1) = \mathbb{P}(X_k \geq 1/c_k) = \int_{1\vee 1/c_k}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\max(1, 1/c_k)} = \min(1, c_k).$$

Cette formule est encore valable pour $c_k = 0$.

(b) Si $\sum_{k\geq 1} c_k = +\infty$ alors $\sum_{k\geq 1} \min(c_k, 1) = +\infty$. Comme les événements $(\{c_nX_n \geq 1\})_{n\geq 1}$ sont indépendants, $\mathbb{P}\left(\limsup\{c_nX_n \geq 1\}\right) = 1$ d'après le lemme de Borel–Cantelli. Si ω appartient à $\limsup\{c_nX_n \geq 1\}$, il existe une infinité de n tels que $c_nX_n(\omega) \geq 1$ et $\sum_{k\geq 1} c_kX_k(\omega) = +\infty$ puisque les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ sont positives. Par conséquent, $\mathbb{P}(B^c) = 1$ et $\mathbb{P}(B) = 0$.

3. (a) Puisque les variables $(Z_n)_{n\geq 1}$ sont positives

$$\sum\nolimits_{k\geq 1} \mathbb{E}[Z_k] = \mathbb{E}\left[\sum\nolimits_{k\geq 1} Z_k\right]$$

Si $\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[Z_k] < +\infty$, alors $\sum_{k\geq 1} Z_k$ est une variable intégrable (tout est positif) donc finie p.s. Soit $\omega \in \Omega$ tel que $\sum_{k\geq 1} Z_k(\omega) < +\infty$. On a $\lim_{k\to+\infty} Z_k(\omega) = 0$ et $Y_k(\omega) = \frac{Z_k(\omega)}{1-Z_k(\omega)} \sim Z_k(\omega)$. La série à terme positif $\sum_{k\geq 1} Y_k(\omega)$ est donc convergente. D'où $\mathbb{P}(A) = 1$.

(b) Supposons que $\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[Z_k] = +\infty$. Les variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ étant indépendantes, il en va de même des variables $(Z_n)_{n\geq 1}$ qui sont de carré intégrable puisque bornées par 1 et

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{\sum_{1\leq k\leq n} Z_k}{\sum_{1\leq k\leq n} \mathbb{E}[Z_k]} - 1\right|^2\right] = \frac{\mathbb{V}\left(\sum_{1\leq k\leq n} Z_k\right)}{\left(\sum_{1\leq k\leq n} \mathbb{E}[Z_k]\right)^2} = \frac{\sum_{1\leq k\leq n} \mathbb{V}(Z_k)}{\left(\sum_{1\leq k\leq n} \mathbb{E}[Z_k]\right)^2}.$$

Remarquons que, pour tout $k \geq 1$, $0 \leq Z_k \leq 1$ et donc que $\mathbb{V}(Z_k) \leq \mathbb{E}[Z_k^2] \leq \mathbb{E}[Z_k]$. Par suite,

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{\sum_{1\leq k\leq n} Z_k}{\sum_{1\leq k\leq n} \mathbb{E}[Z_k]} - 1\right|^2\right] \leq \frac{\sum_{1\leq k\leq n} \mathbb{E}[Z_k]}{\left(\sum_{1\leq k\leq n} \mathbb{E}[Z_k]\right)^2} = \frac{1}{\sum_{1\leq k\leq n} \mathbb{E}[Z_k]} \longrightarrow 0$$

ce qui donne la convergence dans L^2 requise.

En particulier, il existe une sous-suite qui converge presque sûrement vers 1. Si on désigne par $(n_r)_{r\geq 1}$ cette sous-suite, on a, presque sûrement, lorsque $r \to +\infty$,

$$\sum_{k=1}^{n_r} Z_k = \sum_{k=1}^{n_r} \mathbb{E}[Z_k] \times \frac{\sum_{k=1}^{n_r} Z_k}{\sum_{k=1}^{n_r} Z_k} \longrightarrow +\infty.$$

Par conséquent, $\sum_{k\geq 1} Z_k = +\infty$ presque sûrement. Comme x est équivalent à $x/(1+x)$ au voisinage de 0, les séries $\sum_{k\geq 1} Z_k$ et $\sum_{k\geq 1} Y_k$ sont de même nature. Par conséquent, $\mathbb{P}(A^c) = 1$ et $\mathbb{P}(A) = 0$.

4. D'après les questions précédentes, $\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\left[\frac{c_k X_k}{c_k X_k + 1}\right] < +\infty$ est équivalent à $\mathbb{P}(B) = 1$. On a

$$\mathbb{E}\left[\frac{c_k X_k}{c_k X_k + 1}\right] = \int_1^{+\infty} \frac{c_k x}{(c_k x + 1)} \frac{1}{x^2}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{c_k}{(c_k x + 1)x}\, dx.$$

Si $c_k = 0$, on obtient 0. Si $c_k > 0$, on a

$$\frac{c_k}{(c_k x + 1)x} = \frac{-c_k^2}{c_k x + 1} + \frac{c_k}{x}, \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\frac{c_k X_k}{c_k X_k + 1}\right] = \left[-c_k \ln(c_k + \frac{1}{x})\right]_1^{+\infty} = -c_k \ln(c_k) + c_k \ln(1 + c_k).$$

On a donc $\mathbb{P}(B) = 1$ si et seulement si $\sum_{k\geq 1} c_k \ln(1 + 1/c_k) < +\infty$ soit encore

$$\mathbb{P}(B) = 1 \quad \iff \quad \lim_{k\to+\infty} c_k = 0 \text{ et } \sum_{k\geq 1} c_k |\ln c_k| < +\infty.$$