1. **Classes de parties d'un ensemble.**

1. 1. Dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, soit $\mathcal{J}$ la famille formée des intervalles $]a,b]$ ouverts à gauche et fermés à droite et des demi-droites $]-\infty,a]$ ou $]a,+\infty[$ (où $a,b\in\mathbb{R}$, $a\le b$) et soit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par la famille des ouverts. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})=\sigma(\mathcal{J})$.

1. 2. Soit $\mathcal{J}_2$ la famille des rectangles de $\mathbb{R}^2$ de la forme $I_1\times I_2$ où $I_1,I_2\in\mathcal{J}$ [voir1.1] et $\mathcal{P}$ la famille des pavés mesurables de $\mathbb{R}^2$ (c. à d. des produits $A_1\times A_2$ où A_1 et A_2 appartiennent à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).
Montrer que $\mathcal{J}_2$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
Que peut-on dire de $\mathcal{P}$?
Même question pour la famille des pavés mesurables de $\mathbb{R}^d$, $d\in\mathbb{N}, d\ge 2$.
Même question pour la famille $\mathcal{C}$ des cylindres de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Comparer $\sigma(\mathcal{C})$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ et la tribu produit des tribus $\mathcal{B}(R)$.

1. 3. Soit $\mathcal{P}=\{A_1,....A_p\}$ une partition finie d'un ensemble E et $\mathcal{S}=\{\emptyset,E\}\cup\mathcal{P}$.
Montrer que la tribu engendrée par $\mathcal{S}$ est égale à l'ensemble des parties A de E de la forme $A=\bigcup\limits_{i\in I}A_i$ où I est un sous-ensemble de $\{1,\ldots,p\}$.

1. 4. Soit Ω un ensemble non dénombrable, et $\mathcal{A}=\{A\subset\Omega\,|\,A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu.
2. Montrer que $\mathcal{A}=\sigma(\{\{\omega\}\,|\,\omega\in\Omega\})$.
3. Pour tout A appartenant à $\mathcal{A}$, on pose $\mathbb{P}(A)=0$ si A est dénombrable et $\mathbb{P}(A)=1$ si A^c est dénombrable. Montrer que $\mathbb{P}$ définit une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$.

1. 5. Soit $\mathcal{P}=\{A_i, 1\le i\}$ une partition dénombrable d'un ensemble E et soit $\mathcal{D}=\{\emptyset,E\}\bigcup\mathcal{P}$.
Quelle est la tribu engendrée par $\mathcal{P}$?

1. 6. Soit $(\Omega,\mathcal{F})$ un espace probabilisable, et $A\subset\Omega$ tel que $A\notin\mathcal{F}$.
Montrer que la tribu engendrée par $\mathcal{F}$ et A est l'ensemble des parties B de Ω de la forme $B=(F\bigcap A)\bigcup(F'\bigcap A^c)$ où $F,F'\in\mathcal{F}$.

1. 7. Montrer à partir d'un contre-exemple simple, que la réunion de deux tribus n'est pas en général une tribu.
Même question pour la réunion dénombrable d'une suite croissante de tribus.

1. 8. Théorème des classes monotones (version ensembliste)
Une algèbre de Boole de parties de E est un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ qui vérifie :

1. $\mathcal{A}$ contient E et $\emptyset$;
2. $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie et par réunion finie;
3. $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : Si $A\in\mathcal{T}$, $A^c\in\mathcal{A}$.

On se propose de montrer le théorème suivant : "La classe monotone engendrée par une algèbre de Boole est égale à la tribu engendrée par cette algèbre."

1. Montrer que l'intersection d'une famille de classes monotones est une classe monotone.

2. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole de parties d'un ensemble E; montrer que si $\mathcal{A}$ est une classe monotone alors $\mathcal{A}$ est une tribu.

3. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole de parties de E, et $\mathcal{M}$ la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}$.

   (a) Soit $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{M} \,|\, A^c \in \mathcal{M}\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une classe monotone qui contient $\mathcal{A}$. En déduire que $\mathcal{M}$ est stable par passage au complémentaire.

   (b) Soit $A \in \mathcal{M}$. On note $\mathcal{D}(A) = \{B \in \mathcal{M} \,|\, A \cup B \in \mathcal{M}\}$. En considérant d'abord le cas où $A \in \mathcal{A}$, montrer que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{M}$.

   (c) En déduire que $\mathcal{M}$ est une algèbre de Boole.

4. Déduire de ce qui précède le théorème des classes monotones.

1. 9. Théorème de Dynkin. Soit $\mathcal{C}$ un π-système de parties d'un ensemble Ω, qui contient Ω. On se propose de montrer le théorème suivant : "La plus petite classe de parties de Ω qui contient $\mathcal{C}$ et est stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable disjointe est égale à la tribu engendrée par $\mathcal{C}$."
On note $\mathbb{L}$ l'ensemble des classes de parties de Ω qui contiennent $\mathcal{C}$ et qui sont stables par passage au complémentaire et par réunion dénombrable disjointe.

1. Montrer que l'intersection $\mathcal{L}$ des éléments de $\mathbb{L}$ est le plus petit élément de $\mathbb{L}$ et est contenue dans $\sigma(\mathcal{C})$.

2. Montrer que si $\mathcal{L}$ est stable par intersection finie, $\mathcal{L}$ est une tribu.

3. (a) Soit $A \in \mathcal{L}$. On note $\mathcal{D}(A) = \{B \in \mathcal{L} \,|\, A \cap B \in \mathcal{L}\}$. Montrer que $\mathcal{D}(A)$ est une famille stable par réunion dénombrable disjointe et par passage au complémentaire.

   (b) En considérant d'abord le cas où $A \in \mathcal{C}$, montrer que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{L}$.

4. Déduire le théorème de Dynkin de ce qui précède.

1. 10. Montrer que deux probabilités définies sur $\mathcal{B}(R)$ et égales sur $\mathcal{J}$ (voir [1.1.]), sont égales sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. (Utiliser [1.8.] ou [1.9.])

2. **Limites supérieures et inférieures.**

2. 1. Soit (A_n) une suite de parties de Ω.

1. Montrer que $\limsup_n A_n$ est l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à A_n pour une infinité d'indices n (en abrégé $\limsup_n A_n = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A_n \, p.p.n\}$). Montrer que $\liminf_n A_n$ est l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à A_n pour tous les indices n, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux.

2. Montrer que $(\limsup_n A_n)^c = \liminf_n (A_n)^c$.

3. Comparer les ensembles $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$.

4. Montrer que $\mathbb{1}_{\limsup_n A_n} = \limsup_n \mathbb{1}_{A_n}$.

2. 2. Soit (X_n) une suite de v. a. r. définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$.

1. Comparer les ensembles $\{\limsup_n X_n > 1\}$, $\limsup_n \{X_n > 1\}$, $\{\limsup_n X_n \geq 1\}$ et $\limsup_n \{X_n \geq 1\}$.

2. Même question pour $\{\liminf_n X_n > 1\}$, $\liminf_n \{X_n > 1\}$, $\{\liminf_n X_n \geq 1\}$ et $\liminf_n \{X_n \geq 1\}$.

3. **Mesures et probabilités.**

3. 1. Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit une suite (E_n) d'événements de $\mathcal{F}$. Montrer que l'on a :
$\mathbb{P}(\liminf_n E_n) \leq \liminf_n \mathbb{P}(E_n)$
$\mathbb{P}(\limsup_n E_n) \geq \limsup_n \mathbb{P}(E_n)$.

3. 2. Mesures invariantes par une transformation.
Soit $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ la transformation donnée par :
$T(x) = 2x$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$
$T(x) = 2x - 1$ si $\frac{1}{2} < x \leq 1$.
Montrer que la mesure de Lebesgue λ sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ est invariante par T (c'est-à-dire que l'image de λ par T est égale à λ. On peut utiliser l'exercice [1.10.])

3. 3. Tribu complétée. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On dit qu'une partie N de Ω est $\mathbb{P}$-*négligeable* s'il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $N \subset B$ et $\mathbb{P}(B) = 0$. Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties $\mathbb{P}$-négligeables de Ω. On dit que la tribu $\mathcal{F}$ est *complète* pour $\mathbb{P}$ lorsque $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{N}$.

1. Donner un exemple où $\mathcal{F}$ est complète pour $\mathbb{P}$ et un exemple où elle ne l'est pas.

2. Soit $\overline{\mathcal{F}} = \{A \subset \Omega \,|\, A = F \cup N \text{ où } F \in \mathcal{F} \text{ et } N \in \mathcal{N}\}$.

   (a) Montrer que $\overline{\mathcal{F}}$ est une tribu sur Ω.

   (b) Soit $A \in \overline{\mathcal{F}}$; soit $F, F' \in \mathcal{F}$ et $N, N' \in \mathcal{N}$ tels que $A = F \cup N = F' \cup N'$. Montrer que $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F \cap F') = \mathbb{P}(F')$.

   (c) En déduire qu'on peut définir une probabilité $\overline{\mathbb{P}}$ sur $\overline{\mathcal{F}}$ en posant $\overline{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{P}(F)$ pour $A \in \overline{\mathcal{F}}, A = F \cup N, F \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}$.

   (d) Montrer que $\overline{\mathcal{F}}$ est complète pour $\overline{\mathbb{P}}$. On dit alors que $\overline{\mathcal{F}}$ est la tribu *complétée* de $\mathcal{F}$ pour $\mathbb{P}$.

3. 4. Probabilités régulières. On considère une probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que la probabilité $\mathbb{P}$ est *régulière*, c'est à dire telle que pour tout A élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert O_ϵ et un fermé F_ϵ tels que l'on ait : $F_\epsilon \subset A \subset O_\epsilon$ et $\mathbb{P}(O_\epsilon \setminus F_\epsilon) \leq \epsilon$.
   (On pourra montrer que la famille des ensembles boréliens possédant cette propriété est une tribu qui contient les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$).

2. Plus généralement, montrer que la famille des parties de $\mathbb{R}$ possédant cette propriété est une tribu, puis que c'est la tribu complétée de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour $\mathbb{P}$.

3. 5. Probabilités sur$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, suite.
Montrer que toute probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ possède les propriétés suivantes :

1. (Tension) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K_ϵ de $\mathbb{R}$ tel que : $\mathbb{P}(K_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$.

2. Pour tout borélien A de $\mathbb{R}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K inclus dans A et tel que $\mathbb{P}(A \setminus K) \leq \epsilon$.

4. **Fonctions de répartition.**

4. 1. Pseudo-inverse d'une fonction de répartition.
Soit X une v. a. r. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de fonction de répartition F. On se propose de construire une v. a. r. Y de même fonction de répartition que X et définie sur l'espace $(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$, (où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[))$.
Pour $x \in]0,1[$, on pose $Y(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} \,|\, F(y) \geq x\}$ et $Z(x) = \inf\{z \in \mathbb{R} \,|\, F(z) > x\}$.

1. On suppose que X admet une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) strictement positive. Montrer que $\forall x \in]0,1[, Z(x) = Y(x) = F^{-1}(x)$. Montrer que $F(X)$ suit une loi uniforme sur $]0,1[$ et que Y admet F comme fonction de répartition.

2. Donner des exemples où l'on n'a pas $[\forall x \in]0,1[, Z(x) = Y(x)]$.

3. (a) Montrer que $\{y \in \mathbb{R} \,|\, F(y) \geq x\} = [Y(x), +\infty[$ et en déduire que Y a F pour fonction de répartition.
   (b) Montrer que l'on a $\{z \in \mathbb{R} \,|\, F(z) > x\} = [Z(x), +\infty[$ ou $]Z(x), +\infty[$. En déduire que Z a aussi F comme fonction de répartition.

5. **Evènements asymptotiques. Lemmes de Borel Cantelli.**

Dans cette section, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé, (X_n) une suite de v. a. r. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. et (S_n) la suite définie par $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5. 1.

1. Soit $A_1 = \{X_n \longrightarrow 0\}$, $A_2 = \{\limsup_n (X_n) < +\infty\}$ et $A_3 = \{(\frac{S_n}{n})$ converge dans $\mathbb{R}\}$. Montrer que A_1, A_2 et A_3 sont des événements asymptotiques pour la suite de tribus associée à (X_n).

2. Soit $B_1 = \{(S_n)$ converge vers un nombre inférieur à $c\}$, où c est un réel fixé et $B_2 = \{S_n = 0$ pour une infinité de n$\}$.
Les évènements B_1 et B_2 sont ils asymptotiques ?

5. 2. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_n)$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{F}$ qui sont indépendantes entre elles. On note $\mathcal{A}_\infty$ la tribu asymptotique.
Montrer que si X est une v. a. r. $\mathcal{A}_\infty$ mesurable, X est $\mathbb{P}$-p.s. constante.

5. 3. Soit (X_n) une suite de v. a. r. définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et indépendantes entre elles.

1. Que peut-on dire de $\mathbb{P}[\{(X_n)$ converge$\}]$?
2. On suppose que X est une v. a. r. telle que (X_n) converge $\mathbb{P}$-p.s. vers X. Que peut-on dire de X ?

5. 4. (extrait de l'examen de Janvier 1997)
On suppose que les v. a. r. X_n suivent une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer que pour tout $c > 0$, on a la double inégalité :
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{c} - \frac{2}{c^3}\right) e^{-\frac{c^2}{2}} \leq \mathbb{P}[\{X_1 \geq c\}] \leq \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{c^2}{2}}.$$
2. (a) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ on a
$\{\limsup_n \frac{X_n}{\sqrt{2\log n}} > 1 + \epsilon\} \subset \limsup_n \{\frac{X_n}{\sqrt{2\log n}} > 1 + \epsilon\}$.
(b) Montrer que l'on a $\sum_n \mathbb{P}[\{X_n > (1+\epsilon)\sqrt{2\log n}\}] < +\infty$.
(c) En déduire $\mathbb{P}[\{\limsup_n \frac{X_n}{\sqrt{2\log n}} > 1\}] = 0$.
3. On suppose maintenant que (X_n) est en outre une suite de v. a. r. indépendantes.
(a) Montrer que l'on a $\limsup_n \{\frac{X_n}{\sqrt{2\log n}} \geq 1\} \subset \{\limsup_n \frac{X_n}{\sqrt{2\log n}} \geq 1\}$, puis que $\sum_n \mathbb{P}[\{X_n \geq \sqrt{2\log n}\}] = +\infty$,
(b) En déduire $\mathbb{P}[\{\limsup_n \frac{X_n}{\sqrt{2\log n}} \geq 1\}] = 1$.
(c) Conclure que $\mathbb{P}[\{\limsup_n \frac{X_n}{\sqrt{2\log n}} = 1\}] = 1$.

5. 5. Soit $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, muni de la probabilité $\mathbb{P}$ produit des mesures $\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$) et soit (r_n) une suite de $\mathbb{N}^*$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction l_n par $l_n(\omega) = k$ si $\omega \in \Omega$, $\omega_n = \ldots = \omega_{n+k-1} = 0$ et $\omega_{n+k} = 1$ et on note $A_n = \{l_n \geq r_n\}$.

1. On suppose que la suite (r_n) est constante. Interpréter l'ensemble $A = \limsup_n A_n$.
2. Que peut-on dire de $\mathbb{P}(A)$ en général ?

3. Soit $\epsilon > 0$.

   (a) Montrer que $\mathbb{P}[\{l_n \geq (1+\epsilon)\log_2(n) i.o\}] = 0$.

   (b) En déduire que $\mathbb{P}[\{\limsup_n \frac{l_n}{log_2(n)} > 1\}] = 0$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note s_n l'entier tel que $\log_2 n \leq s_n < 1 + \log_2 n$. On pose $n_1 = 1$ et $n_{k+1} = n_k + s_{n_k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que l'on a $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{s_n 2^{s_n}} \leq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^{s_{n_k}}}$ et que ces séries divergent.

   (b) En déduire que $\mathbb{P}[\{l_{n_k} \geq s_{n_k} i.o.\}] = 1$.

5. En déduire que $\mathbb{P}[\{\limsup_n \frac{l_n}{\log_2 n} \geq 1\}] = 1$.

6. Conclure que $\limsup_n \frac{l_n}{\log_2 n} = 1$ $\mathbb{P}$-p.s.

5. 6. Marche aléatoire. On considère une suite de v. a. r. (X_n), i.i.d. de loi $\mu = p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}$)où $p \in [0,1]$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\mathbb{P}[\{S_n = 0\}]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. On définit deux variables N et T_{sup} par :
   $N = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_k = 0\}}$
   $T_{sup}(\omega) = k$ si $S_k(\omega) = 0$ et $\forall n > 0, S_{k+n}(\omega) \neq 0$ pour $k \in \mathbb{N}$,
   $T_{sup}(\omega) = +\infty$ si $S_n(\omega) = 0$ i. o.

   (a) Interpréter T_{sup} et N.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}[\{T_{sup} = k\}] = \mathbb{P}[\{S_k = 0\}]\mathbb{P}[\{T_{sup} = 0\}]$.

   (c) En déduire que l'on a : $1 = (\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}[\{S_k = 0\}])\mathbb{P}[\{T_{sup} = 0\}] + \mathbb{P}[\{T_{sup}(\omega) = +\infty\}]$.

3. (a) On suppose $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}[\{S_k = 0\}] < +\infty$. Montrer qu'alors :
   $N < +\infty$ p. s., $\mathbb{P}[\{\exists\, n > 0, S_n = 0\}] < 1$, $E[N] = \frac{1}{1 - \mathbb{P}[\{\exists\, n > 0, S_n = 0\}]}$.

   (b) On suppose $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}[\{S_k = 0\}] = +\infty$. Montrer qu'alors :
   $\mathbb{P}[\{T_{sup} = 0\}] = 0$, $\mathbb{P}[\{\exists\, n > 0, S_n = 0\}] = 1$, $N = +\infty$ p.s.

4. Discuter suivant la valeur de p si la marche revient p.s. ou non en 0.

5. Généraliser le cas $p = \frac{1}{2}$ à une marche dans $\mathbb{R}^d$, de loi μ uniforme sur $\{e_1, \ldots, e_d\}$ où $(e_1, \ldots, e_d)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On pourra montrer que la marche revient $\mathbb{P}$-p.s. en 0 ssi $d \leq 2$. (Théorème de Polya)

6. **Intégration des v. a. r. Moments.**

6. 1. Calculer, lorsqu'elles sont définies, l'espérance et la variance des lois usuelles (Bernoulli, $\mathcal{B}(n,p)$, géométrique, $\mathcal{P}(\lambda)$, $\mathcal{E}(\lambda)$, $\mathcal{C}(a)$, double exponentielle, ...)

6. 2. Calculer le moment d'ordre n d'une v. a. r. suivant une loi normale centrée réduite.

6. 3. Théorème de Bernstein. Soit (X_n) une suite de v. a. r. indépendantes et identiquement distribuées de loi $p\delta_1 + (1-p)\delta_0$ où $0 \leq p \leq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de Y_n.
2. Soit $\delta > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'on a $\mathbb{P}[\{|Y_n - p| > \delta\}] \leq \frac{1}{n\delta^2}$.
3. Soit h une fonction continue sur $[0,1]$.
   (a) Montrer que $\mathbb{E}[h \circ Y_n]$ converge vers $h(p)$ uniformément en p.
   (b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynome P_n (indépendant de p) tel que $\mathbb{E}[h \circ Y_n] = P_n(p)$ pour tout $p \in [0,1]$.
4. En déduire le théorème : "Une fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes."

6. 4. On considère une v. a. r. intégrable X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que l'on a pour tout évènement E de $\mathcal{F}$:
$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \left(\mathbb{P}(E) < \delta \Longrightarrow \int_E |X| d\mathbb{P} < \epsilon\right)$.

6. 5. Intégrale et queue de distribution.

1. Soit X une v. a. r. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs entières positives. Montrer que l'on a $\int X d\mathbb{P} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X \geq n\})$.
2. On suppose simplement maintenant que X est à valeurs réelles positives. Montrer que l'on a l'égalité : $\int X d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{P}(\{X \geq x\})\, dx$.
   (On pourra pour obtenir cette égalité, utiliser le théorème de Fubini).
3. On suppose enfin que X est une v. a. r. de puissance 4ème intégrable. En utilisant le 2), montrer que l'on a :
   $\forall \epsilon > 0,\ \mathbb{E}(X^4) \geq \frac{3\epsilon^4}{4} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^{2n} \mathbb{P}[\{|X| > \epsilon 2^{\frac{n}{2}}\}]$.
   En déduire l'existence d'une suite (ϵ_n) tendant vers 0 en décroissant et telle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^{2n} \mathbb{P}[\{|X| > \epsilon_n 2^{\frac{n}{2}}\}] < +\infty$.

6. 6. Lemme de Scheffé. On considère une suite (X_n) de v. a. r. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, intégrables et convergeant $\mathbb{P}$-p.s. vers une v. a. r. X intégrable.

1. On suppose que les v. a. r. X_n sont positives. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$, on a la convergence $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} X$.
(Exprimer$|X_n - X| - (X_n - X)$ en fonction de $X_n - X$ et utiliser le théorème de convergence dominée.)

2. On ne suppose plus les v. a. r. X_n positives.

   (a) Donner un exemple où le résultat précédent n'est plus vérifié.

   (b) Montrer que l'on a encore $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} X$ si l'on remplace la condition $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$ par la condition $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}(|X|)$.

7. **Densités de probabilité.**

7. 1. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et pour t réel, soit $g(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx}\, d\mathbb{P}(x)$. On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) < +\infty$.

1. Donner un exemple où cette hypothèse est vérifiée, un exemple où elle ne l'est pas.

2. Soit t réel fixé; montrer que pour tout k entier, $k \geq 1$ on a :
$\int_{\mathbb{R}} |x|^k e^{|tx|}\, d\mathbb{P}(x) < +\infty$.

3. Montrer que g est deux fois dérivable ; calculer g' et g".

4. Soit t réel fixé ; on pose pour A borélien réel $\mathbb{Q}_t(A) = \frac{1}{g(t)} \int_A e^{tx}\, d\mathbb{P}(x)$.

   (a) Montrer que Q_t définit une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

   (b) Calculer $\mathbb{E}(Q_t)$ et $\sigma^2(Q_t)$ en fonction de $g(t)$, $g'(t)$, g"(t).

7. 2. Absolue continuité et densités de probabilité.
(D'après l'examen de Septembre 1996.) Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, et soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On dira que $\mathbb{Q}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ (et on notera $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$), si l'on a :
$\forall A \in \mathcal{F}$, $[\mathbb{P}(A) = 0 \implies \mathbb{Q}(A) = 0]$.

1. On considère sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ les lois de probabilité suivantes : la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, la loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$ de paramètre 1, la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$; en examinant ces lois deux à deux, donner les relations d'absolue continuité que l'on peut obtenir entre elles.
On considère les deux énoncés suivants :

   (a) $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall A \in \mathcal{F}$, $[\mathbb{P}(A) \leq \alpha \implies \mathbb{Q}(A) < \epsilon]$.

   (b) Il existe une v. a. r. Z définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$, positive, $\mathbb{P}$-intégrable et telle que : $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{Q}(A) = \int_A Z\, d\mathbb{P}$.

2. Montrer que l'on a $[(a) \Longrightarrow \mathbb{Q} << \mathbb{P}]$.

3. Montrer que si (a) n'est pas vrai, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout n entier, on puisse trouver un élément A_n de $\mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}[A_n] \leq \frac{1}{2^n}$ et $\mathbb{Q}[A_n] \geq \epsilon$.
En déduire $\mathbb{P}[\limsup_n A_n] = 0$ et $\mathbb{Q}[\limsup_n A_n] \geq \epsilon$.

4. Déduire de ce qui précède que l'on a l'équivalence $[\mathbb{Q} << \mathbb{P} \iff (a)]$.

5. Montrer que si (b) est vrai pour Z, alors Z est à égalité $\mathbb{P}$-p.s. près, l'unique v. a. r. possédant la propriété (b).
Montrer que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z] = 1$ (où $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ désigne l'espérance relative à la probabilité $\mathbb{P}$).

6. Montrer que l'on a $[(b) \implies \mathbb{Q} << \mathbb{P}]$.
On admettra que l'on a aussi l'implication $[\mathbb{Q} << \mathbb{P} \implies (b)]$. Lorsque $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$, la v. a. r. Z définie dans l'énoncé (b) est appelée *densité* de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$.

7. 3. (suite de l'exercice précédent). Avec les notations de l'exercice précédent, on suppose $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$. Soit (Y_n) une suite de v. a. r. définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On note μ_n la loi de Y_n pour $\mathbb{P}$ (c'est à dire la probabilité image de $\mathbb{P}$ par Y_n), et ν_n la loi de Y_n pour $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que pour tout n, ν_n est absolument continue par rapport à μ_n.

Soit μ et ν des probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{A}$ la famille des boréliens A de $\mathbb{R}$ tels que $\mu(\delta A) = \nu(\delta A) = 0$ (où $\delta A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ désigne la frontière de A). On suppose que pour tout A appartenant à $\mathcal{A}$, on a : $\lim_{n \to +\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$ et $\lim_{n \to +\infty} \nu_n(A) = \nu(A)$.

2. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole.[voir 1. 8.]

3. Soit F un fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour $\epsilon > 0$ donné, on note $F^\epsilon = \{x \in \mathbb{R} \,|\, d(x, F) \leq \epsilon\}$, où $d(x, F) = \inf_{y \in F}\{|x - y|\}$.
   (a) Montrer que les ensembles δF^ϵ sont deux à deux disjoints.
   (b) On suppose que $\exists \alpha > 0, \forall \epsilon \in]0, \alpha[, F^\epsilon \notin \mathcal{A}$.
   Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $E_p = \{\epsilon > 0 \,|\, (\mu + \nu)(\delta F^\epsilon) > \frac{1}{p}\}$. Déduire du a) que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, E_p est fini. En déduire une contradiction.
   (c) En déduire qu'il existe une suite $\epsilon(n)$ de nombres réels positifs décroissant vers 0, telle que $F^{\epsilon(n)} \in \mathcal{A}$ pour tout n.
   (d) Montrer que F est l'intersection des $F^{\epsilon(n)}$.
   (e) En déduire que $\mathcal{A}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

4. Soit Z la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ et soit $\epsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $N = N(\epsilon)$ tel que :$\int_{\{Z > N\}} Z \, d\mathbb{P} \leq \epsilon$.
   (b) Soit $A \in \mathcal{A}$. Montrer que l'on a $\forall n$, $\nu_n(A) \leq N\mu_n(A) + \epsilon$ et en déduire que
   $$\nu(A) \leq N\mu(A) + \epsilon. \tag{1}$$
   (c) Montrer que la famille $\mathcal{C}$ des éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour lesquels l'inégalité (1) est satisfaite est une classe monotone. En déduire que (1) est satisfaite pour tout A borélien. [voir 1. 8.]

(d) En déduire que ν est absolument continue par rapport à μ.

8. **Loi d'une v. a. r.**

8. 1. Variables symétriques. Soit X une v. a. r. symétrique, c'est à dire telle que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{-X}$. Soit f une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[f(X)] = \frac{1}{2}(\mathbb{E}[f(|X|)] + \mathbb{E}[f(-|X|)])$.
2. En déduire que la loi de X est déterminée par celle de $|X|$.

8. 2. Soit S (resp. T) une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, (resp. $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$) et à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$. On suppose que les lois de S et de T sont égales.
On considère une application mesurable f définie sur $(E, \mathcal{B})$ et à valeurs dans $(R, B(R))$. Montrer que les lois de $f(S)$ et de $f(T)$ sont égales.

8. 3. Soit X une v. a. r. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $Y = \frac{1}{X^2}$.

1. Montrer que Y est $\mathbb{P}$-presque sûrement définie comme v. a. r. réelle. Montrer que sa loi admet une densité f, donnée par :
$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2u}} u^{-\frac{3}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(u).$$
2. Montrer que $\mathbb{E}(|Y^r|) < +\infty$ pour tout r tel que $r < \frac{1}{2}$.

9. **Intégration de variables à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.**

9. 1. Pour $x \in [1, +\infty[$ et $y \in [0, 1[$, on pose $f(x, y) = \exp(-xy) - 2\exp(-2xy)$. Montrer que :

1. $\int_1^{+\infty} \left(\int_0^1 f(x, y)\, dy \right) dx < 0.$
2. $\int_0^1 \left(\int_1^{+\infty} f(x, y)\, dx \right) dy > 0.$
3. $\int_1^{+\infty} \left(\int_0^1 |f(x, y)|\, dy \right) dx = +\infty.$

9. 2. Soit X, Y, Z trois v. a. r. telles que X et Y aient la même loi ; XZ et YZ ont elles la même loi ?

9. 3. Soit X et Y deux v. a. r. indépendantes telles que $X + Y$ soit de puissance p-ième intégrable, où $p \geq 1$.
Montrer que X et Y sont de puissances p-ième intégrables.

9. 4. Soit X et Y deux v. a. r. indépendantes de puissance p-ième intégrable, où $p \geq 1$. Montrer que XY est de puissance p-ième intégrable.

9. 5. Problème. (d'après le partiel de Novembre 1995) On fixe $p \geq 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$ et on donne $2N$ v. a. r. X_i et X_i' $(1 \leq i \leq N)$, définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de puissance p-ième intégrable et centrées, chaque X_i' étant de même loi que X_i.
On considère en outre N v. a. r. ϵ_i, $i = 1 \dots N$, de même loi, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que $\mathbb{P}(\{\epsilon_i = 1\}) = \mathbb{P}(\{\epsilon_i = -1\}) = \frac{1}{2}$.
On suppose que les $3N$ v. a. r. $X_1, X_1', \epsilon_1, \dots, X_N, X_N', \epsilon_N$ sont indépendantes.

Préliminaire 1 : On se donne N nombres réels a_i et on considère la v. a. r. $X = \sum_{i=1}^{N} a_i \epsilon_i$.

Calculer $E[X]$. Montrer que l'on a les égalités :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 \text{ et } \mathbb{E}(X^4) = \sum_{i=1}^{N} a_i^4 + 6 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} a_i^2 a_j^2. \tag{1}$$

En déduire que :

$$\mathbb{E}(X^4) \leq 3[\mathbb{E}(X^2)]^2. \tag{2}$$

Préliminaire 2 : Soit X une v. a. r. centrée de puissance p-ième intégrable. On note X^* une symétrisée de X, c'est à dire une v. a. r. définie par $X^* = X - X'$ où X' est une v. a. r. indépendante de X et de même loi que X.

(i) Montrer que X^* est une v. a. r. symétrique.

(ii) Montrer en utilisant le théorème de Fubini et l'inégalité de Jensen que l'on a :

$$\mathbb{E}[|X|^p] \leq \mathbb{E}[|X^*|^p]. \tag{3}$$

Première partie.

1. On suppose $p \in [1, 2]$.

   (a) Montrer :
   $$\mathbb{E}[|\sum_{i=1}^{N} X_i|^p] \leq \mathbb{E}[|\sum_{i=1}^{N} (X_i - X_i')|^p] = \mathbb{E}[|\sum_{i=1}^{N} \epsilon_i (X_i - X_i')|^p] \leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} (\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_i')^2)^{\frac{p}{2}} \bigotimes_{i=1}^{n} d\mathbb{P}_{X_i}(x_i) \bigotimes_{i=1}^{n} d\mathbb{P}_{X_i'}(x_i') \tag{4}$$
   (On pourra utiliser l'égalité (1) et l'inégalité de Jensen de façon adéquate).

   (b) A partir de ce qui précède et des inégalités élémentaires :
   $(a + b)^d \leq 2^{d-1}(a^d + b^d)$ pour $a \geq 0$, $b \geq 0$, et $d > 1$
   $(a + b)^d \leq a^d + b^d$ pour $a \geq 0$, $b \geq 0$, et $d \in [0, 1]$,
   montrer que l'on a :
   $$\mathbb{E}[|\sum_{i=1}^{N} X_i|^p] \leq \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} |X_i - X_i'|^p] \leq 2^p \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[|X_i|^p] \tag{5}$$

$$\mathbb{E}[|\sum_{i=1}^{N} X_i|^p] \leq 2^{1+\frac{p}{2}}\,\mathbb{E}[(\sum_{i=1}^{N} X_i^2)^{\frac{p}{2}}]. \tag{6}$$

2. On prend maintenant $p \in [2, 4]$.

   (a) Montrer que l'inégalité (4) obtenue à la question 1) est encore valide.

   (b) Montrer en utilisant l'inégalité (2) et en procédant comme dans la question 1- a), que l'on a :
   $$\mathbb{E}[|\sum_{i=1}^{N} X_i|^p] \leq 3^{\frac{p}{4}} 2^p\,\mathbb{E}[(\sum_{i=1}^{N} X_i^2)^{\frac{p}{2}}]. \tag{7}$$

Deuxième partie.
On se propose dans cette partie de compléter les inégalités (6) et (7) par une inégalité dans l'autre sens avec une constante (ne dépendant pas de N) adéquate.
Préliminaire 3.

(i) Soit Y une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et de puissance quatrième intégrable. Montrer que l'on a :
$$[\mathbb{E}(Y^2)]^3 \leq \mathbb{E}(Y^4)[E(|Y|)]^2. \tag{8}$$

(ii) Soient N constantes réelles $a_1, \ldots, a_N$. Déduire des inégalités (8) et (2) que l'on a
$$\sum_{i=1}^{N} a_i^2 \leq 3\mathbb{E}[(|\sum_{i=1}^{N} a_i\epsilon_i|)]^2$$
et
$$(\sum_{i=1}^{N} a_i^2)^{\frac{p}{2}} \leq 3^{\frac{p}{2}}\,\mathbb{E}[|\sum_{i=1}^{N} a_i\epsilon_i|^p] \tag{9}$$

3 On prend $p \geq 1$ quelconque.

   (a) Montrer à partir de l'inégalité (9) que l'on a :
   $$\mathbb{E}[(\sum_{i=1}^{N} X_i^2)^{\frac{p}{2}}] \leq 3^{\frac{p}{2}}\,\mathbb{E}[|\sum_{i=1}^{N} \epsilon_i X_i|^p].$$

   (b) Montrer enfin que :
   $$\mathbb{E}[|\sum_{i=1}^{N} \epsilon_i X_i|^p] \leq \mathbb{E}[|\sum_{i=1}^{N} (X_i - X_i')|^p] \leq 2^p\mathbb{E}[|\sum_{i=1}^{N} X_i|^p].$$

   (c) Conclure.

10. **Etude de lois.**

10. 1. Soit X, Y, Z trois v. a. r. indépendantes de même loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$. Donner les lois de $X + Y$, $\frac{(X+Y)}{2}$, $X + Y + Z$ et $\frac{(X+Y+Z)}{3}$.

10. 2. On considère l'application f de $\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+$, qui à (r, t) fait correspondre $(x, y) = (r\cos t, r\sin t)$. On suppose que le couple $U = (X, Y)$ est une v. a. r. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ suivant une loi uniforme sur le disque unité.

1. Déterminer la loi du couple $(R, T) = f^{-1}(U)$.

2. Montrer que les v. a. r. $Z_1 = \sqrt{(-2 \log R^2)} \cos T$ et $Z_2 = \sqrt{(-2 \log R^2)} \sin T$ sont indépendantes et suivent une même loi normale centrée réduite.

10. 3. Sommes de lois exponentielles.
Soient $X_1, X_2, \ldots X_n$ des v. a. r. indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On note $Y_1 = X_1, Y_2 = X_1 + X_2, \ldots, Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

1. Calculer l'espérance, la variance, la fonction caractéristique de Y_n.

2. Calculer la densité de Y_n (on pourra procéder par récurrence).

10. 4. Loi de Cauchy. Soient X et Y deux v. a. r. indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de même loi normale centrée réduite.

1. Donner la loi de $Z = \frac{X}{Y}$ (cette loi s'appelle loi de Cauchy)

2. Que dire des moments de Z ?

3. Soit X une v. a. r. de loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Montrer que $\tan X$ suit une loi de Cauchy.

10. 5. Au temps $T = 0$, trois personnes A, B et C arrivent à un bureau de poste ; il y a deux guichets et ils sont libres. On appelle X, Y et Z les durées nécessaires pour servir A, B et C respectivement. On suppose que X, Y et Z sont des v. a. r. indépendantes et de même loi $\mathcal{E}(\lambda), \lambda > 0$. On commence à servir A et B tout de suite, mais C doit attendre que l'un des guichets se libère.

1. Quelle est la loi de $|X - Y|$? Celle de $\inf(X, Y)$?

2. Quelle est la probabilité que C ne soit pas la dernière personne à quitter le bureau de poste ?

3. Soit T le temps passé par C dans le bureau. Donner la fonction de répartition et la loi de T.

4. Soit T' le temps écoulé lorsque les trois personnes sont servies. Quelle est la fonction de répartition de T' ?

10. 6. On considère deux v. a. r. X et Y indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\mu), \mu > 0$.

1. Donner la loi de $U = \inf(X, Y)$, celle de $V = X - Y$, puis celle du couple (U, V). Les v.a.r. U et V sont elles indépendantes ?

2. Réciproquement, on suppose que X et Y sont deux v. a. r. indépendantes positives de même densité f, continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ et que $V = X - Y$ et $U = \inf(X, Y)$ sont indépendantes.

   (a) Montrer que les lois de U et V ont des densités g et h telle que pour presque tout $(u, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$:

   $$f(u)f(u + |v|) = g(u)h(v) \tag{1}$$

(b) Montrer qu'on peut choisir g et h strictement positives, continues sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}$ respectivement, qu'alors l'égalité (1) a lieu pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, puis qu'on a

$$\frac{f(u+v)}{f(0)} = \frac{f(u)}{f(0)} \frac{f(v)}{f(0)} \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.$$

(c) En déduire que X et Y suivent toutes deux une loi exponentielle.

10. 7. Loi Arcsinus. Soient X et Y deux v. a. r. indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et suivant une même loi normale centrée réduite.

1. Montrer que $U = \frac{X^2+Y^2}{2}$ suit une loi exponentielle dont on calculera le paramètre.

2. On considère $V = \frac{X^2}{X^2+Y^2}$. Calculer la loi de (U, V). Montrer que U et V sont indépendantes. Donner la loi de V (on calculera sa densité). On appelle cette dernière "loi Arc sinus".

3. Déduire de ce qui précède que si A et B sont deux v. a. r. indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ suivant respectivement une loi exponentielle de paramètre 1 et une loi Arc sinus, alors $2AB$ suit la loi du carré d'une v. a. r. $\mathcal{N}(0, 1)$.

4. Soit C une v. a. r. suivant une loi de Cauchy de paramètre 1. Déduire de 2) que $\frac{1}{1+C^2}$ suit une loi Arc sinus.

10. 8. Lois Gamma et du Chi-deux. Pour $a > 0$, on pose $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} \, dx$. On dit qu'une v. a. r. X suit une loi $\Gamma(a, \lambda)$ où $\lambda > 0$, si la loi de X a la densité :

$$f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

1. Pour $a > 0$, montrer que $\Gamma(a)$ est défini et $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. Que vaut $\Gamma(n)$ pour n entier, $n > 0$?

2. Soit X et Y deux v. a. r. indépendantes de lois respectives $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$. Donner l'espérance et la variance de X et montrer que $X + Y$ suit une loi $\Gamma(a + b, \lambda)$.

3. Soit X une v. a. r. normale centrée réduite ; montrer que X^2 suit une loi $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (cette loi est appelée loi du Chi-deux (notée : χ^2) à 1 degré de liberté). En déduire la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

4. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des v. a. r. normales centrées réduites et indépendantes; donner la loi de $Z = X_1^2 + \ldots + X_n^2$ (loi du Chi-deux à n degrés de liberté) ainsi que l'espérance et la variance de Z.

10. 9. (d'après le partiel de Novembre 96) Soient X et Y deux v. a. r. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, positives, indépendantes et admettant les densités f_X et f_Y respectivement.

1. En considérant le changement de v. a. r. $XY = T$ et $Y = S$, donner la densité de XY en fonction de f_X et f_Y.

2. Soient a, b, λ des réels strictement positifs. On suppose que X suit une loi $\beta(a,b)$ de densité

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, \mathbb{1}_{]0,1[}(x).$$

On suppose que Y suit une loi $\Gamma(a+b,\lambda)$ c'est à dire de densité

$$f_Y(y) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)} y^{a+b-1} e^{-\lambda y}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y).$$

Montrer que XY suit une loi $\Gamma(a,\lambda)$.

3. Soit U, V, W trois v. a. r. indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, positives et de lois respectives : $\Gamma(a,\lambda)$, $\Gamma(b,\lambda)$, $\Gamma(c,\lambda)$.

   (a) Montrer (par le changement de v. a. r. : $(U,V) \longrightarrow (\frac{U}{U+V}, U+V)$ que $\frac{U}{U+V}$ suit une loi $\beta(a,b)$ et est indépendante de $(U+V, W)$.

   (b) En déduire que $\frac{U}{U+V+W}$ suit une loi $\beta(a, b+c)$.

   (c) En écrivant :$\frac{U}{U+V+W} = \frac{U}{U+V}\frac{U+V}{U+V+W}$, montrer que si R et Z sont des v. a. r. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indépendantes et de lois respectives $\beta(a,b)$ et $\beta(a+b,c)$, alors RZ suit une loi $\beta(a, b+c)$.

4. On suppose maintenant que X et Y sont indépendantes et suivent la même loi de Paréto d'indice $\alpha > 0$, donnée par sa densité : $f(x) = \alpha \frac{1}{x^{\alpha+1}}\, \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)$.

   (a) Donner la densité de $T = XY$. Pour quelles valeurs de α, T admet elle une espérance finie ? Calculer alors cette espérance.

   (b) Montrer que si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent une même loi de Paréto d'indice α, le produit $X_1 \times \dots \times X_n$ admet la densité

$$f_n(x) = \frac{\alpha^n}{(n-1)!} \frac{1}{x^{\alpha+1}} (\log x)^{n-1}\, \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x).$$

11. **Transformée de Laplace.**

11. 1. Injectivité de la transformation de Laplace. Voir le partiel de Novembre 2000.

11. 2. Soit X une v. a. r. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$ et soit $Y = \frac{1}{X^2}$. On rappelle [ex. 8.3.] que Y a une loi de densité f, donnée par

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2u}} u^{-\frac{3}{2}}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(u).$$

1. Pour $t \geq 0$, soit $G(t) = \mathbb{E}[e^{-tY}]$.

   (a) Montrer que $G(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; calculer $G'(t)$.

   (b) Montrer que pour tout $t > 0$ on a : $G'(t) + \frac{1}{\sqrt{2t}} G(t) = 0$.

(c) En déduire que pour tout $t \geq 0$, $G(t) = e^{-\sqrt{2t}}$.

2. Montrer que si l'on considère n v. a. r. indépendantes $Y_1, Y_2, ...Y_n$ et de même loi que Y, on a l'égalité des lois : $\mathbb{P}_{Y_1+...+Y_n} = \mathbb{P}_{n^2 Y}$.

3. On considère deux v. a. r. indépendantes X_1 et X_2, de lois normales respectives $\mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$.

   (a) Trouver la transformée de Laplace de $T = \frac{1}{X_1^2} + \frac{1}{X_2^2}$.

   (b) Montrer alors que la v. a. r. $U = \frac{X_1 X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}$ suit une loi normale centrée de variance σ^2, où $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}$.

12. **Fonctions caractéristiques.**

12. 1. Une v. a. r. X est symétrique si X et $-X$ ont la même loi. Montrer qu'alors la fonction caractéristique de X est paire et à valeurs réelles. Réciproques ?

12. 2. Soit ϕ la fonction caractéristique d'une v. a. r. X. Montrer que ϕ est uniformément continue.

12. 3. Soit X une v. a. r. à valeurs entières et ϕ sa fonction caractéristique. Montrer que l'on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(\{X = k\}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ikt} \phi(t)\, dt$.

12. 4. Loi de Cauchy.

1. Calculer la fonction caractéristique d'une v. a. r. X suivant une loi doublement exponentielle de paramètre $a > 0$.

2. En déduire la fonction caractéristique de la loi de Cauchy de paramètre a.

12. 5. Soit U une v. a. r. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et dont la fonction caractéristique ϕ est constante sur un voisinage I de 0.

1. Montrer que pour tout $t \in I$, on a $tx \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \mathbb{P}_U$-p.s.

2. En déduire que $\mathbb{P}_U = \delta_0$.

12. 6. Soit ϕ une fonction caractéristique. Les fonctions $Re(\phi)$ et $Im(\phi)$ sont-elles des fonctions caractéristiques ? Même question pour $|\phi|^2$.

12. 7. Soit p entier supérieur à 1, soit $\phi_1, \ldots, \phi_p$ des fonctions caractéristiques; soit $a_1, a_2, \ldots a_p$ des nombres positifs tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_p = 1$.
Montrer que $\sum_{k=1}^{p} a_k \phi_k$ est une fonction caractéristique.

12. 8. Soit N une v. a. r. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, suivant une loi de Poisson de paramètre λ et (X_n) une suite de v. a. r. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de même loi, indépendantes entre elles et indépendantes de N.

Soit Y la v. a. r. donnée par $Y(\omega) = \sum_{k=0}^{N(\omega)} X_k(\omega)$. Calculer la fonction caractéristique de Y en fonction de celle de X_1.

12. 9. Soient Z et Y deux v. a. r. définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et indépendantes.

1. On suppose que Z et Y suivent des lois de Cauchy de paramètres respectifs α et β. Montrer que $Z + Y$ suit une loi de Cauchy de paramètre $\alpha + \beta$.
   Si $\alpha = \beta$, montrer que pour tous a et b positifs, $aY + bZ$ a la même loi que $(a + b)Y$.
2. On suppose que Z et Y suivent une même loi symétrique et que pour tous a et b positifs, $aY + bZ$ suit la même loi que $(a + b)Y$.
   Montrer que si Y et Z ne sont pas p.s. constantes, elles suivent une loi de Cauchy.

12. 10. Soit X et Y deux v. a. r. indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et de même loi de variance σ^2 et a, b deux réels vérifiant $a^2 + b^2 = 1$ et $ab \neq 0$. On suppose que $aX + bY$ et X ont la même loi. On veut montrer qu'alors X et Y suivent une loi normale $N(0, \sigma^2)$. On note ϕ la fonction caractéristique de X et $\psi = \frac{\phi'}{\phi}$.

1. Montrer que ψ est de classe C^1; calculer $\psi(0)$ et $\psi'(0)$.
2. Si Z est une v. a. r. de loi $a^2\delta_a + b^2\delta_b$, montrer que pour tout t réel, on a
   $\psi'(t) = \mathbb{E}(\psi'(Zt))$.
3. En déduire que $\psi' = -\sigma^2$.
4. Conclure.

12. 11. Soit X et Y deux v. a. r. indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de même loi et de variance 1 et a, b deux réels vérifiant $a^2 + b^2 = 1$. On suppose que $aX + bY$ suit une loi normale centrée réduite. On veut montrer que X et Y suivent une loi normale centrée réduite.
On note ϕ la fonction caractéristique de X, ϕ_1 la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\phi_1(t) = \phi(t)\exp(\frac{t^2}{2})$ et $\psi = \frac{\phi_1'}{\phi_1}$.

1. Montrer que la fonction caractéristique ϕ de X vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$
   $\phi(at)\phi(bt) = \exp(-\frac{t^2}{2})$.
2. Etudier ψ et conclure.

13. **Variables aléatoires gaussiennes.**

13. 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2 - xy + \frac{y^2}{2})}$.

1. Vérifier que f est la densité d'une loi gaussienne, dont on calculera la matrice de covariance.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, dont la loi a la densité f. Trouver une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ telle que $A \circ X$ ait ses coordonnées indépendantes.

13. 2. (d'après le partiel de Novembre 96) Soient X_1, X_2 deux v. a. r. indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On définit Y_1 et Y_2 par : $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2)$ et $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2)$.

1. Montrer que Y_1 et Y_2 sont deux v. a. r. indépendantes suivant aussi une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

2. En utilisant la fonction caractéristique de $\frac{1}{2}X_1^2$ calculer la fonction caractéristique de $\frac{1}{2}(X_1^2 - X_2^2)$.

3. Montrer que X_1X_2 et $\frac{1}{2}(X_1^2 - X_2^2)$ suivent la même loi.

4. Soient X_3 et X_4 deux autres v. a. r. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de même loi $\mathcal{N}(0,1)$ et telles que les 4 v. a. r. X_i, $i = 1, \ldots, 4$ soient indépendantes. Donner la fonction caractéristique de $X_1X_2 - X_3X_4$. Donner la loi de cette v. a. r. et calculer sa densité.

13. 3. Soit (X,Y) une variable aléatoire gaussienne dans $\mathbb{R}^2$, de lois marginales centrées réduites.

1. Montrer qu'on peut trouver une v. a. r. gaussienne réelle Z et un nombre a tel que Z soit indépendant de X et que l'on ait l'égalité : $Y = X\sin a + Z\cos a$ Montrer que $\mathbb{E}[sign(X)sign(Y)] = (\frac{2}{\pi})\text{Arcsin } \mathbb{E}[XY]$.

13. 4. Problème. Soit $N \in \mathbb{N}$. On considère $2N$ v. a. r. indépendantes $X_1, \ldots, X_N$, $Y_1, \ldots, Y_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $Y_1, \ldots, Y_N$ suivent chacune une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ et que pour tout $k = 1, \ldots N$, $\mathbb{P}[\{X_k = 0\}] = 0$.

1. Montrer que $\frac{X_1Y_1}{\sqrt{X_1^2}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

2. Soit $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{E}[\exp(it\,\frac{x_1Y_1+\ldots+x_NY_N}{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_N^2}})]$

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{E}[e^{itZ}]$ où $Z = \frac{X_1Y_1+\ldots+X_NY_N}{\sqrt{X_1^2+\ldots+X_N^2}}$ et en déduire la loi de Z. (Utiliser le théorème de Fubini)

4. On suppose maintenant que $Y_1, \ldots, Y_N$ suivent chacune une loi de Cauchy ordinaire (de paramètre 1), les autres hypothèses sur $X_1, \ldots, X_N$, $Y_1, \ldots, Y_N$ étant inchangées. En procédant comme en 2) et 3), calculer : $\mathbb{E}[e^{itU}]$ où $U = \frac{X_1Y_1+\ldots+X_NY_N}{|X_1|+\ldots+|X_N|}$. En déduire la loi de U.

13. 5. Soit (X_n) une suite de v. a. r. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que la suite (X_n) est gaussienne si pour tout k entier, tout k-uplet $(X_1, \ldots, X_k)$ est une v. a. r. gaussienne à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.
On supposera dans la suite que (X_n) est gaussienne et que pour chaque $n, \mathbb{E}[X_n] = 0$.

1. Montrer que pour tout N entier, il existe des v. a. r. $Y_1, \ldots, Y_N$ gaussiennes et indépendantes telles que $\sum\limits_{n=1}^{N} X_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{N} Y_n^2$.

2. Montrer que l'on a l'inégalité : $\mathbb{E}[\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n^2] \leq (\mathbb{E}[\exp(-\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n^2)])^{-2}$.

3. Déduire de ce qui précède l'équivalence entre les trois assertions suivantes :

   (a) $\mathbb{P}[\{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n^2 < +\infty\}] > 0$

   (b) $\mathbb{P}[\{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n^2 < +\infty\}] = 1$

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[X_n^2] < +\infty$.

13. 6. (d'après le partiel de Novembre 1995.)On considère une v. a. r. gaussienne (X, Y, Z) définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. On suppose que (X, Y, Z) est centrée et que sa matrice de covariance est $\begin{pmatrix} 1 & r & 0 \\ r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où r est un nombre réel tel que $r^2 < 1$. On pose $U = \frac{1}{Z^2}$; on rappelle [ex. 10. 1.] que U admet la densité f_U donnée par :

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2u}} \ 1\!\!1_{\mathbb{R}_+^*}(u).$$

et la transformée de Laplace définie pour $t \geq 0$ par

$$\mathbb{E}[\exp(-tU)] = e^{-\sqrt{2t}}.$$

On considère la v. a. r. (S, T) à valeurs dans R^2, définie par : $(S, T) = (\sqrt{U}X, \sqrt{U}Y)$.

1. Calculer la densité de (X, Y, Z), puis celle de (X, Y, U).

2. En déduire que la fonction caractéristique de (S, T) est donnée par :

$$\phi_{(S,T)}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[\exp(i(St_1 + Tt_2)] = \exp(-\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + 2rt_1t_2}).$$

   (On pourra appliquer le théorème de Fubini.)

3. Soit (a, b) avec $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que $aS + bT$ suit une loi de Cauchy dont on précisera le paramètre.

4. Soit $(S', T') = (\sqrt{U}X', \sqrt{U}Y')$ où (X', Y', Z) est une v. a. r. gaussienne centrée à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ de covariance la matrice identité. Soit A une matrice (2, 2). Calculer la fonction caractéristique du couple $A\begin{pmatrix} S' \\ T' \end{pmatrix}$. Montrer que l'on peut choisir A inversible et telle que $A\begin{pmatrix} S' \\ T' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix}$ aient même loi.

13. 7.

1. Soit (X, Y, Z) une variable aléatoire gaussienne centrée de matrice de covariance C. A quelle condition sur C la variable X est-elle indépendante de (Y, Z) ?

2. On suppose que l'on a $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer (sans calculs) qu'il existe un unique couple (a, b) de réels tel que la variable $U = X - aY - bZ$ soit indépendante de (Y, Z). Puis déterminer a et b.

3. Déterminer la projection orthogonale de X sur $\mathbb{L}^2(\sigma(Y, Z))$.

13. 8. Problème. Dans ce texte, c désigne un réel strictement positif.
Préliminaire. Soit X une v. a. r. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Montrer que pour tout $c \geq 2\sigma$, on a l'inégalité

$$\frac{\sigma}{2c\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{c^2}{2\sigma^2}\right) \leq \mathbb{P}[\{X \geq c\}] \leq \frac{\sigma}{c\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{c^2}{2\sigma^2}\right). \qquad (1)$$

1. Soit (X, Y) une v. a. r. gaussienne définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, centrée et de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ où $\rho > 0$.

   (a) Montrer que $\rho \leq 1$.

   (b) Montrer que si $X \neq Y$, on a $\rho < 1$. Montrer qu'il existe une v. a. r. Z de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, indépendante de X et telle que $Y = \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} Z$.

   (c) Montrer que l'on a $\mathbb{P}[\{X \geq c, Y \geq c\}] \geq \mathbb{P}[\{X \geq c, \sqrt{1 - \rho^2} Z \geq c(1 - \rho)\}]$.

   (d) On suppose $X \neq Y$ et $\frac{1-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \geq 2$. Montrer en appliquant le c) et en utilisant (1) que l'on a
   $$\mathbb{P}[\{X \geq c, Y \geq c\}] \geq \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{8\pi\, c^2 (1 - \rho)} exp\left(-\frac{c^2}{1 + \rho}\right)$$

   (e) Montrer que pour tout λ tel que $0 \leq \lambda \leq 1$, on a
   $\mathbb{P}[\{X \geq c, Y \geq c\}] \leq \mathbb{P}[\{\lambda X + (1 - \lambda) Y \geq c\}]$.

   (f) Utiliser alors (1), puis, en minimisant en λ le résultat obtenu, montrer que l'on a pour $c \geq 1$,
   $$\mathbb{P}[\{X \geq c, Y \geq c\}] \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{c^2}{1 + \rho}\right).$$

2. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ une v. a. r. gaussienne à valeurs dans $\mathbb{R}^n$; on suppose que X est centrée et on note $\sigma^2 = \sup_{\{i=1,\ldots,n\}} \sigma^2(X_i)$.

   (a) Montrer que pour tout $\delta > 0$ on a
   $$\mathbb{E}[\sup_{\{i=1,\ldots,n\}} X_i] \leq \int_0^{+\infty} \mathbb{P}[\{\sup_{\{i=1,\ldots,n\}} |X_i| > t\}]\, dt$$
   $$\leq \delta + \sum_{i=1}^{n} \int_\delta^{+\infty} \mathbb{P}[\{|X_i| > t\}]\, dt \leq \delta + \frac{2n\sigma}{\delta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right).$$

(b) Déduire de ce qui précède en choisissant δ judicieusement que si $n \geq 2$, on a

$$\mathbb{E}[\sup_{\{i=1,\ldots,n\}} X_i] \leq \sigma\sqrt{2\log n} + 1.$$

(c)) On suppose maintenant que toutes les X_i sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que pour tout $\delta > 0$ on a l'inégalité
$\int_0^\delta \mathbb{P}[\{\sup_{\{i=1,\ldots,n\}} |X_i| > t\}]\,dt \geq \delta(1-(1-\mathbb{P}[\{|X_1| > \delta\}])^n)$.
En déduire qu'on peut trouver une constante $K > 0$ telle que pour n suffisamment grand, en choisissant $\delta = \sqrt{2\log(\frac{n}{\log n})}$, on ait

$$\mathbb{E}[\sup_{\{i=1,\ldots,n\}} X_i] \geq K\sqrt{\log n}.$$

$\boxed{\text{14. Différents types de convergence.}}$

14. 1. On suppose que la suite (X_n) est une suite de v. a. r. indépendantes et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}[\{X_n = 1\}] = p_n$ et $\mathbb{P}[\{X_n = 0\}] = 1 - p_n$, où $0 < p_n < 1$.
Montrer que l'on a les équivalences :
$(X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\longrightarrow} 0) \iff (\lim_{n\to+\infty} p_n = 0)$
$(X_n \stackrel{\mathbb{L}^p}{\longrightarrow} 0) \iff (\lim_{n\to+\infty} p_n = 0)$
$(X_n \stackrel{\mathbb{P}-p.s}{\longrightarrow} 0) \iff (\sum_{n=1}^{+\infty} p_n < +\infty)$

14. 2. Soit deux suites (X_n) et (Y_n) de v. a. r. réelles, définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que l'on a :
$(X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\longrightarrow} X \text{ et } Y_n \stackrel{\mathbb{P}}{\longrightarrow} Y) \Longrightarrow (X_n + Y_n \stackrel{\mathbb{P}}{\longrightarrow} X + Y)$
et
$(X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\longrightarrow} X \text{ et } Y_n \stackrel{\mathbb{P}}{\longrightarrow} Y) \Longrightarrow (X_nY_n \stackrel{\mathbb{P}}{\longrightarrow} XY)$.
On pourra utiliser la définition ou un argument de sous-suites.

14. 3. Soit g une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si la suite de v. a. r. (Y_n) converge $\mathbb{P}$-p.s. vers la v. a. r. Y, alors la suite $(g(Y_n))$ converge $\mathbb{P}$-p.s. et en Probabilité vers $g(Y)$.

2. Montrer que si (X_n) converge en Probabilité vers X, alors $(g(X_n))$ converge en Probabilité vers $g(X)$.

14. 4. Convergence en Probabilité et dans $\mathbb{L}^1$.
Soit (X_n) une suite de v. a. r. On suppose qu'il existe Y positif et intégrable tel que $|X_n| \leq Y$, et que (X_n) converge en Probabilité vers une v. a. r. X.
Montrer que (X_n) converge vers X dans $\mathbb{L}^1$.

14. 5. Métrique pour la convergence en probabilité.
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On note $\mathcal{L}$ l'espace des classes d'équivalence (pour l'égalité presque sûre) de v. a. r. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Pour tout X, Y v. a. r. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on définit
$d(X,Y) = \mathbb{E}[|X-Y| \wedge 1]$ et $K(X,Y) = \inf\{\epsilon > 0 \,|\, \mathbb{P}(\{|X-Y| > \epsilon\}) \leq \epsilon\}$.

1. Montrer que d définit une distance sur l'espace $\mathcal{L}$.
2. Montrer que pour toute suite de v. a. r. (X_n) et toute v. a. r. X définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on a :
   $(X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X) \Longleftrightarrow (d(X_n, X) \longrightarrow 0)$.
3. Montrer que K définit une distance sur $\mathcal{L}$ et que l'on a
   $(K(x,y))^2 \leq d(x,y) \leq 2K(x,y)$.
4. En déduire que $\mathcal{L}$ muni de la métrique d (resp. K) est un espace métrique complet.

14. 6. Une métrique pour la convergence p.s ?
Montrer qu'il n'existe pas de métrique sur l'espace $\mathcal{L}$ défini dans l'exercice 14. 5. telle que la convergence au sens de cette métrique soit équivalente à la convergence $\mathbb{P}$-presque sûre.

14. 7. Soit (X_n) une suite de v. a. r. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose qu'il existe $p > 0$ tel que l'on ait : $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[|X_n|^p] < +\infty$.
Montrer que la suite (X_n) converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers 0.

14. 8. Convergence en loi et en Probabilité.
Soit (X_n) une suite de v. a. r. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Soit a un nombre réel; montrer que l'on a :
   $(X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a) \Longrightarrow (X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a)$.
2. Soit X une v. a. r. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que (X_n) converge en loi vers X; montrer qu'en général $(X_n - X)$ ne converge pas en loi vers 0.
3. Soit X une v. a. r. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose $(X_n, X) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, X)$.
   Montrer que (X_n) converge en probabilité vers X.

14. 9. Problème. Loi faible des grands nombres. (D'après le partiel de 1996)
On considère une suite (X_n) de v. a. r. indépendantes et de même loi définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
On désire obtenir un résultat du type $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ (où a est un réel).
On propose une méthode directe ne passant pas par la loi forte des grands nombres.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $X_i(n)$ la v. a. r. définie par : $X_i(n) = X_i \, \mathbb{1}_{\{|X_i| \leq n\}}$, $S_n^* = \sum_{i=1}^{n} X_i(n)$ et $m_n = \mathbb{E}[X_1(n)]$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\alpha > 0$, on a
   $\mathbb{P}[\{|S_n - S_n^*| > \alpha\}] \leq \mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{n} \{|X_i| > n\}] \leq n\mathbb{P}[\{|X_1 > n|\}]$.

(b) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}[\{|S_n - nm_n| > \epsilon\}] \leq \frac{4n}{\epsilon^2}\mathbb{E}[X_1(n)^2] + n\mathbb{P}[\{|X_1| > n\}] \quad (1)$$

2. On suppose dans cette question, et seulement dans cette question, que $\mathbb{E}[|X_1|]$ est fini.

   (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} m_n = \mathbb{E}[X_1]$.

   (b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} xP[\{|X_1| > x\}] = 0$.

   (c) Montrer que $\mathbb{E}[X_1(n)^2] \leq \int_0^{n^2} \mathbb{P}[\{X_1^2 > x\}]\,dx = 2\int_0^n \mathbb{P}[\{|X_1| > u\}]u\,du$.

   (d) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}[X_1(n)^2] = 0$.

   (e) En déduire que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$.

3. On suppose maintenant que X_1 est une v. a. r. symétrique dont la fonction de répartition est donnée par
   $F(x) = \frac{1}{2}$ si $0 \leq x < c$, $F(x) = 1 - \frac{1}{2x\log x}$ si $x \geq c$,
   où c est un réel, tel que $clog(c) = 1$; (c est alors un nombre compris entre 1 et 2).

   (a) Donner la densité de X_1.

   (b) Montrer que $\mathbb{P}[\{|X_1| > t\}] = \frac{1}{t\log t}$ quand t est assez grand.

   (c) La v. a. r. X_1 est-elle intégrable ?

   (d) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}[X_1(n)^2] = 0$.

   (e) Montrer que $m_n = 0$.

   (f) En appliquant l'inégalité (1), déduire de ce qui précède que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

14. 10. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires gaussiennes,à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que (X_n) converge en loi vers X. On veut montrer que X est gaussienne.

1. Se ramener au cas $d = 1$.
2. Montrer que la suite $(varX_n)$ converge vers un nombre $\sigma^2, \sigma \in [0, +\infty]$, puis que $\sigma < +\infty$.
3. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}[\{-N < X_n < N\}] > \frac{1}{2}$.
4. En déduire que si $m_n = \mathbb{E}[X_n]$, la suite (m_n) est bornée par N.
5. Conclure.

15. Suites de sommes de v. a. r.

Dans cette section, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé, (X_n) une suite de v. a. r. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et (S_n) la suite définie par $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + ... + X_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

15. 1. Calcul approché d'intégrale par une méthode de Monte Carlo.
Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Soit (Y_n) une suite de v. a. r. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que (X_n) et (Y_n) sont deux suites indépendantes, indépendantes entre elles et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les v. a. r. X_n et Y_n suivent une même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose : $Z_n = \mathbb{1}_{\{f(X_n)>Y_n\}}$.

1. Calculer $E[Z_n]$.
2. Montrer en utilisant la loi forte des grands nombres, que l'on peut, à partir d'échantillons de la loi uniforme sur $[0,1]$, obtenir une approximation de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$.

15. 2. On suppose que les v. a. r. X_n sont i.i.d et que X_1 suit la loi $p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}$, où $\frac{1}{2} < p \leq 1$. Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $T = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = a\}$ (avec la convention $T = +\infty$ si l'ensemble est vide).
Montrer que T est $\mathbb{P}$-p.s. fini.

15. 3. Une loi faible pour des v. a. r. faiblement corrélées.
On suppose que les v. a. r. X_n sont centrées et qu'il existe une suite de réels (r_k) convergeant vers 0 et telle que $\mathbb{E}[X_l X_k] \leq r_{k-l}$ pour tout (l,k), $l \leq k$.
Montrer que $(\frac{S_n}{n})$ converge en probabilité vers 0.

15. 4. Un théorème de Borel.
Soit $x \in [0,1]$, $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{2^k}$ où les x_n valent 0 ou 1 et où la suite (x_n) ne stationne pas à 1; pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. On dit que x est normal si $(\frac{S_n}{n})$ converge vers $\frac{1}{2}$.
Montrer que l'ensemble $\mathcal{N}$ des nombres normaux est un borélien et que pour la mesure de Lebesgue, un réel $x \in [0,1]$ est presque sûrement normal.

15. 5. On suppose que (X_n) est une suite de variables i.i.d. suivant une loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$.
Etudier la convergence (en loi, en probabilité, $\mathbb{P}$-p.s.) de la suite $(\frac{S_n}{n})$.

15. 6. On suppose que (X_n) est une suite de variables i.i.d. dont la loi est donnée par
$\mathbb{P}[\{X_1 = (-1)^{k-1}k\}] = \frac{C}{k^2 \log k}$ pour $k \geq 2$ (où C est une constante de normalisation).
La suite $(\frac{S_n}{n})$ converge-t-elle $\mathbb{P}$-p.s. ?
Montrer qu'elle converge en probabilité vers une constante que l'on déterminera. (On pourra utiliser la méthode de l'exercice 14.9.1

15. 7. Loi des grands nombres pour des v. a. r. positives. On suppose que (X_n) est une suite de variables i.i.d., positives et telles que $\mathbb{E}[X_1] = +\infty$.
Montrer que $(\frac{S_n}{n})$ converge $\mathbb{P}$-p.s. vers l'infini.

15. 8. On suppose que (X_n) est une suite de v. a. r. indépendantes entre elles et centrées et que l'on a : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[X_n^2\, \mathbb{1}_{\{|X_n|\leq 1\}}] < +\infty$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[X_n\, \mathbb{1}_{\{|X_n|>1\}}] < +\infty$.

1. Montrer que l'on a $\mathbb{P}[\limsup\{|X_n| > 1\}] = 0$.

2. Utiliser le théorème des séries de Kolmogorov pour en déduire que la suite (S_n) converge $\mathbb{P}$-p.s.

15. 9. Deuxième inégalité de Kolmogorov.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que les v. a. r. $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sont indépendantes, centrées et bornées par un nombre réel c donné.

1. Pour $a > 0$, on définit $A = \{\sup_{1 \le k \le n} |S_k| \ge a\}$ et pour $k = 1, \ldots, n$, on pose $A_k = \{|S_1| < a, \ldots, |S_{k-1}| < a, |S_k| \ge a\}$.
   (a) Montrer que : $\mathbb{E}[S_n^2 \mathbb{1}_{A^c}] \le a^2(1 - \mathbb{P}[A])$.
   (b) Montrer que sur A_k, on a $|S_k| \le a + c$.
   (c) $\mathbb{E}[S_n^2 \mathbb{1}_A] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}] + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(S_n - S_k)^2 \mathbb{1}_{A_k}] \le \mathbb{P}(A)((a+c)^2 + \mathbb{E}[S_n^2])$.
   (d) En déduire que $\mathbb{P}(A) \ge 1 - \frac{(a+c)^2}{\mathbb{E}[S_n^2]}$.
   Comparer avec la première inégalité de Kolmogorov.
2. Montrer que si (S_n) converge p.s, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[X_n^2] < +\infty$. Réciproque ?

15. 10. On suppose que (X_n) est une suite de v. a. r. indépendantes entre elles et que la suite (S_n) converge en probabilité. On veut montrer qu'alors la suite (S_n) converge $\mathbb{P}$-presque sûrement.

1. Soit (Y_n) une suite de v. a. r. indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\delta > 0$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, on note
   $T_k = Y_1 + \ldots + Y_k$,
   $A_k = \{\omega \mid |T_i(\omega)| \le 2\delta \text{ pour } i = 1, .., k-1 \text{ et } |T_k(\omega)| > 2\delta\}$
   et $B_k = \{\omega \mid |T_n(\omega) - T_k(\omega)| \le \delta\}$.
   (a) Montrer que les A_k sont disjoints et que pour chaque k, A_k et B_k sont indépendants. Interpréter $\bigcup_{k=1}^n A_k$.
   (b) En déduire que l'on a $\mathbb{P}[\{|T_n| > \delta\}] \ge \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B_k)$.
   (c) Soit $A = \{\omega \mid \sup_{1 \le k \le n} |T_k(\omega)| > 2\delta\}$. Montrer que l'on a
   $$\mathbb{P}[\{|T_n| > \delta\}] \ge \mathbb{P}[A](\inf_{1 \le k \le n} \mathbb{P}[B_k]). \tag{1}$$
2. Soit ϵ tel que $0 < \epsilon < 1$.
   (a) Montrer qu'il existe N entier tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait
   $$\inf_{1 \le k \le n} \mathbb{P}[\{|S_{N+n} - S_{N+k}| \le \epsilon\}] \ge 1 - \epsilon. \tag{2}$$

(b) En appliquant la question 1) à la suite (Y_j) définie par $Y_j = X_{N+j}$, et en utilisant les inégalités (1) et (2), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}[\{\sup_{1\leq m\leq n} |S_{N+m} - S_N| > 2\epsilon\}] \leq \tfrac{1}{1-\epsilon}\mathbb{P}[\{|S_{N+n} - S_N| > \epsilon\}].$$

(c) En déduire la convergence presque sûre de (S_n).

15. 11. On suppose que (X_n) est une suite de v. a. r. indépendantes entre elles et suivant une même loi exponentielle de paramètre 1.

1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de S_p.
   Montrer que pour tout $p \geq 3$, $\mathbb{E}[(S_p)^{-2}] = \frac{1}{(p-1)(p-2)}$.

2. On considère une suite (Y_i) de v. a. r. indépendantes, centrées et de variance 1. On suppose que la suite (Y_i) est indépendante de (X_i). On considère alors la suite (Σ_n) où, pour tout entier $n \geq 3$, $\Sigma_n = \sum\limits_{i=3}^{n} (S_i)^{-1} Y_i$.

   (a) Montrer que la suite (Σ_n) est bornée dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et converge dans cet espace.

   (b) Soit $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 3$.
   Ecrire $\mathbb{P}[\{\sup\limits_{1\leq k\leq n} |\Sigma_{N+k} - \Sigma_N| > \epsilon\}]$ sous forme d'intégrale par rapport à $\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2$, où P_1 est la loi de $(S_1, S_2, \ldots, S_{N+n})$ et P_2 est la loi de $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N+n})$.
   Montrer que l'on a $\mathbb{P}[\{\sup\limits_{1\leq k\leq n} |\Sigma_{N+k} - \Sigma_N| > \epsilon\}] \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}[S_{N+k}^{-2}]\, \mathbb{E}[Y_{N+k}^2]$.
   (On pourra appliquer l'inégalité de Kolmogorov après avoir utilisé le Théorème de Fubini pour l'expression obtenue en b).)

   (c) En déduire la convergence presque sûre de (Σ_n).

15. 12. Loi forte des grands nombres pour des v. a. r. dans $\mathbb{L}^4$. On suppose que (X_n) est une suite de variables i.i.d. admettant un moment d'ordre 4 et on note $m = \mathbb{E}[X_1]$. On veut démontrer directement la LFGN dans ce cas.
Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $\mathbb{P}[\{|\frac{S_n}{n} - m| > \epsilon\}] \leq \frac{C}{n^2}$. En déduire que $\frac{S_n}{n}$ converge $\mathbb{P}$-p.s. vers m.

16. **Autour du Théorème limite central.**

16. 1. Soit (X_n) une suite de v. a. r. indépendantes de même loi, telles que $\mathbb{E}[X_n] = m$ et $\sigma^2(X_n) = s^2$ (m et s étant des réels fixés.) Soient a, b, c des constantes réelles fixées. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_n = aX_n + bX_{n+1} + c$ et $T_n = Y_1 \ldots + Y_n$.

1. Montrer que les suites $(\frac{T_n}{n})$ et $(\frac{X_n}{\sqrt{n}})$ convergent $\mathbb{P}$-p.s. vers des constantes que l'on déterminera.

2. Montrer que $\frac{T_n - \mathbb{E}[T_n]}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ étant une loi normale dont on calculera les paramètres.

16. 2. Soit (X_n) une suite de v. a. r. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indépendantes, de même loi, centrées et de variance 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et $A_k = \{\limsup_n |\frac{S_n}{\sqrt{n}}| \geq k\}$.

1. Montrer que l'on a $A_k \supset \limsup_n \{|\frac{S_n}{\sqrt{n}}| \geq k\}$ et $\mathbb{P}[A_k] \geq \limsup_n \mathbb{P}[\{|\frac{S_n}{\sqrt{n}}| \geq k\}]$.
2. En utilisant le théorème central limite, montrer que l'on a $\mathbb{P}[\{\limsup_n |\frac{S_n}{\sqrt{n}}| \geq k\}] > 0$.
3. Montrer que A_k est un événement asymptotique.
4. Déduire de ce qui précède que $\mathbb{P}[\{\limsup_n |\frac{S_n}{\sqrt{n}}| = +\infty\}] = 1$. Que signifie ce résultat ?

16. 3. Convergence des densités dans le T. C. L.
(extrait de l'examen de Septembre 1997) Soit ϕ la fonction caractéristique d'une v. a. r. X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que X est centrée et a une variance $\sigma^2 \in]0, +\infty[$. On suppose que pour tout t réel avec $|t| \geq 1$, on a $|\phi(t)| \leq \frac{1}{|t|}$.
On considère une suite (X_n) de v. a. r. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi que X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $Y_n = \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
   (a) Calculer la fonction caractéristique ϕ_{Y_n} de Y_n en fonction de ϕ.
   Montrer que ϕ_{Y_n} est Lebesgue intégrable.
   (b) Montrer que la loi de Y_n admet une densité f_{Y_n}.
   (c) Montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe $r(\delta) \in]0, 1[$ tel que $|\phi_{Y_n}(t)| \leq r(\delta)$, pour tout $t \geq \delta$.
2. (a) Montrer que pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
   $$\log(\phi(t)) = -\frac{t^2\sigma^2}{2}(1 + \epsilon'(t)) \text{ où } |\epsilon'(t)| \leq \epsilon \text{ dès que } |t| \leq \delta.$$
   (b) Montrer que, pour tout t, $(\phi_{Y_n}(t))$ converge vers $\exp(-\frac{t^2}{2})$ et que
   $$|\phi_{Y_n}(t)| \leq \exp(-\frac{t^2}{2}(1 - \epsilon)) \text{ dès que } \frac{|t|}{\sigma\sqrt{n}} \leq \delta.$$
   (c) Montrer que l'on a $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\delta\sigma\sqrt{n}}^{\delta\sigma\sqrt{n}} |\phi_{Y_n}(t) - \exp(-\frac{t^2}{2})|\, dt = 0$.
   (d) Montrer (en utilisant le 1. c)) que l'on a $\lim_{n\to+\infty} \int_{\{|t|>\delta\sigma\sqrt{n}\}} |\phi_{Y_n}(t)|\, dt = 0$.
   (e) Déduire de la question précédente, la convergence dans $\mathbb{L}^1(\lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, de ϕ_{Y_n} vers la fonction caractéristique de la loi normale centrée réduite.
   (f) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\lim_{n\to+\infty} f_{Y_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$.

16. 4. Soit (X_n) une suite de v. a. r. indépendantes, de même loi μ centrée, de variance 1. Soit (λ_n) une suite de nombres réels strictement positifs. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = \sqrt{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2}$ et $Y_n = \frac{1}{s_n}(\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n)$.
On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$. Le but du problème est de déterminer des conditions sous lesquelles la propriété (P) suivante est vraie :
(P) : $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.
On pose, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \sup\limits_{1 \leq k \leq n} \frac{\lambda_k}{s_n}$.
I On suppose la condition suivante (d'uniforme petitesse) satisfaite :
(U.P.) : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = 0$.

1. Montrer que $s_n^2 = \sigma^2(\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n)$.
2. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{\{|X_1| > \frac{\epsilon}{f(n)}\}} X_1^2 \, d\mathbb{P} = 0$.
3. (utilise le T. C. L. de Lindeberg) Ecrire la condition de Lindeberg adaptée au cadre présenté, et déduire de 2) qu'elle est satisfaite.
4. Conclure.

II On suppose que (P) est vérifiée mais que (U.P.) n'est pas satisfaite.

1. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $k(n) = \inf\{k \,|\, 1 \leq k \leq n \text{ et } \lambda_k = \sup\limits_{1 \leq j \leq n} \lambda_j\}$.
   (a) Montrer que $(k(n))$ est croissante et que $\lim\limits_{n \to +\infty} k(n) = +\infty$.
   (b) Montrer que $\left(\frac{\lambda_{k(n)}}{s_{k(n)}}\right)$ ne tend pas vers 0.
   (c) En déduire qu'il existe a avec $a \in]0,1]$ et une suite d' entiers (n_j) strictement croissante telle que $\lim\limits_{j \longrightarrow +\infty} (\frac{\lambda_{n_j}}{S_{n_j}}) = a$.
2. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{\lambda_n}{S_n} X_n$.
   (a) Montrer que $\forall n$, $\phi_{Y_n} = \phi_{(Y_n - U_n)} \phi_{U_n}$.
   (b) Montrer que (U_{n_j}) converge en loi vers la loi de aX_1.
3. On considère le cas où $a = 1$.
   (a) Montrer que $(Y_{n_j} - U_{n_j})$ converge vers 0 dans $\mathbb{L}^2$.
   (b) En déduire la loi μ (utiliser 2. a)).
4. On examine le cas où $a < 1$.
   (a) Montrer que $(Y_{n_j} - U_{n_j})$ converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0, 1 - a^2)$.
   (b) En déduire la loi μ.

16. 5. Une condition suffisante pour le T. C. L.

1. Soit X et Y deux v. a. r. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indépendantes, intégrables et telles que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$. On considère $Z = X - Y$. On note ϕ_Z et ϕ_X les fonctions caractéristiques de Z et de X.

   (a) Montrer que Z est symétrique et que $\phi_Z(t) = |\phi_X(t)|^2$.

   (b) Montrer que Z est de carré intégrable si et seulement si X est de carré intégrable.

2. Soit (Z_n) une suite de v. a. r. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indépendantes, symétriques, intégrables et de même loi; pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $S_n = Z_1 + ... + Z_n$.
   On suppose que $\sup_n \mathbb{E}[|\frac{S_n}{\sqrt{n}}|] < +\infty$.

   (a) Calculer $E[Z_1]$ et la fonction caractéristique de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ en fonction de la fonction caractéristique commune ϕ_Z des Z_i.

   (b) Montrer que la suite $(\frac{S_n}{\sqrt{n}})$ est tendue, c'est-à dire que $\forall \epsilon > 0$, $\exists A > 0$, $\forall n$, $\mathbb{P}[\{|\frac{S_n}{\sqrt{n}}| > A\}] < \epsilon$.
   On admettra qu'alors, il existe une sous suite (n_k) et une probabilité μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\frac{S_{n_k}}{\sqrt{n_k}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$ (quand $k \longrightarrow +\infty$.)

   (c) On note ϕ la fonction caractéristique de μ. Montrer que pour tout t, $\phi_(t)$ est réelle et qu'elle est strictement positive sur un intervalle $]-T, T[$, $T > 0$.
   Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec $|t| < T$, on a

   $$\lim_{k \longrightarrow +\infty} n_k \log(\phi_Z(\frac{t}{\sqrt{n_k}})) = \lim_{k \longrightarrow +\infty} n_k(\phi_Z(\frac{t}{\sqrt{n_k}}) - 1) = \log(\phi(t)).$$

   (d) Déduire de ce qui précède que pour tout t avec $|t| < T$, il existe un réel $N(t) > 0$ tel que l'on ait pour tout k entier, $\mathbb{E}[n_k(1 - \cos(\frac{tZ_1}{\sqrt{n_k}}))] \leq N(t)$.

   (e) Donner la limite presque sûre (lorsque $k \longrightarrow +\infty$), de $n_k(1 - \cos(\frac{tZ_1}{\sqrt{n_k}}))$ pour $|t| < T$. En déduire que $E[(Z_1)^2] < +\infty$. Identifier alors la limite μ.

3. Soit (X_n) une suite de v. a. r. definies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indépendantes, intégrables et de même loi, telles que $E[X_1] = 0$.
   On suppose que l'on a $\sup_n \mathbb{E}[|\frac{X_1 + ... + X_n}{\sqrt{n}}|] < +\infty$. Utiliser les questions précédentes pour montrer que X_1 est de carré intégrable; conclure.

16. 6. T. C. L. dans $\mathbb{R}^d$. (extrait de l'examen de Janvier 1995)
Dans tout l'exercice, A^t désigne la transposée de la matrice A.

1. Préliminaire. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telle que (X_n) converge en loi vers la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \Gamma)$. Soit A une matrice $d \times d$. Montrer qu'alors la suite (X'_n), donnée par $({X'_n}^t) = (AX_n^t)$, converge en loi vers la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, A\Gamma A^t)$.

2. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, de composantes a_1, a_2, a_3, vérifiant

   (i) pour tout $i = 1, 2$ ou 3, a_i suit une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{3}$,

(ii) $a_1 + a_2 + a_3 = 1$

(ainsi un et un seul des a_i est non nul).

(a) Donner l'espérance et la matrice de covariance de X.

(b) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi que X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Donner l'espérance de S_n. Montrer que sa matrice de covariance C est la somme des matrices de covariance des $X_i, i = 1, \ldots, n$, puis que $C = \frac{n}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Soit $N_1(n), N_2(n), N_3(n)$ les composantes de S_n.
Calculer $N_1(n) + N_2(n) + N_3(n)$.

3. Soit $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\; N_1(n) - \frac{n}{3}, \quad N_2(n) - \frac{n}{3} \; \right)$.

   (a) Montrer que (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée de matrice de covariance $\Sigma = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) Donner les valeurs propres λ_1 et λ_2 de Σ et montrer qu'il existe une matrice A orthogonale (qu'on ne calculera pas), telle que $A\Sigma A^t = \Delta$ avec
   $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

   (c) En déduire que la suite (Y'_n), donnée par $(Y'^t_n) = (AY^t_n)$ converge en loi vers une v. a. r. Z, dont on déterminera la loi.

   (d) Montrer que la suite $(Y_n \, \Sigma^{-1} \, Y^t_n)$ converge en loi vers un χ^2 à deux degrés de liberté, noté $\chi^2(2)$.

4. (a) Calculer Σ^{-1}, puis $(Y_n \, \Sigma^{-1} \, Y^t_n)$.

   (b) Déduire du a) et de 3. d) que l'on a la convergence en loi
   $\sum_{i=1}^{3} \frac{3}{n}[N_i(n) - \mathbb{E}(N_i(n))]^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(2)$.

16. 7. (extrait de l'examen de Janvier 1996) Soit (X_n) une suite de v. a. r. indépendantes et de même loi, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et que $\sigma^2(X_1) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
On considère une suite (T_n) de v. a. r. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, possédant la propriété suivante : Il existe une suite (k_n) croissante de nombres entiers strictement positifs tels que $\lim_{n \to +\infty} k_n = +\infty$ et $\frac{T_n}{k_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.

1. Montrer que $\frac{S_{k_n}}{\sqrt{k_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.

2. Montrer que $\frac{k_n}{T_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.

3. Montrer que $\frac{S_{k_n}}{\sqrt{T_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.

4. (a) Soient $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ donnés.
On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \{|S_{T_n} - S_{k_n}| > \epsilon\sqrt{k_n}\}$ et $B_n = \{|T_n - k_n| > \delta k_n\}$.
Montrer que l'on a : $\mathbb{P}[A_n] \leq \mathbb{P}[A_n \cap B_n^c] + \mathbb{P}[B_n]$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}[B_n] = 0$, pour tout $\delta > 0$.
   (c) Montrer que pour n suffisamment grand, si on désigne par $[\delta k_n]$ la partie entière de δk_n, on a
$\mathbb{P}[A_n \cap B_n^c] \leq 2\mathbb{P}[\{\sup\limits_{1\leq p\leq[\delta k_n]+1} |S_{k_n+p} - S_{k_n}| > \epsilon\sqrt{k_n}\}] \leq \frac{4\delta}{\epsilon^2}$.
   (d) Déduire de ce qui précède que $\frac{S_{T_n}-S_{k_n}}{\sqrt{k_n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
5. Déduire que l'on a $\frac{1}{\sqrt{T_n}} \sum\limits_{i=1}^{T_n} X_i \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$. (Attention : T_n est une v. a. r.).
6. Déduire de la question 4) que $\frac{S_{T_n}-S_{k_n}}{k_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, puis montrer que l'on a $\frac{S_{T_n}}{T_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
7. Interpréter les résultats des questions 5) et 6).

17. **Espérance Conditionnelle, Lois conditionnelles.**

17. 1. Soit X et Y deux v. a. r. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, intégrables, indépendantes et de même loi.
Montrer que l'on a $\mathbb{E}[X \,|\, X+Y] = \mathbb{E}[Y \,|\, X+Y] = \frac{X+Y}{2}$ $\mathbb{P}$-p.s.

17. 2. Soit X une v. a. r. intégrable définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On considère $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous tribus de $\mathcal{F}$, et on suppose que la tribu $\sigma(X, \mathcal{A})$ est indépendante de $\mathcal{B}$.
Montrer que l'on a $\mathbb{E}[X \,|\, \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})] = \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{A}]$.

17. 3. Soit (X_n) une suite de v. a. r. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, intégrables, indépendantes et de même loi; pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + ... + X_n$.
Montrer que $\mathbb{E}[X_1 \,|\, \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)] = \frac{S_n}{n}$ $\mathbb{P}$-p.s. (on pourra appliquer les exercices 1 et 2).

17. 4. Soit X une v. a. r. de loi exponentielle de paramètre λ. Soit t réel positif fixé; pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose $\mu(B) = \mathbb{P}[\{X - t \in B\} \,|\, \{X \geq t\}]$.

1. Montrer que μ est la loi exponentielle de paramètre λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
2. Si X représente une durée de vie, comment peut-on interpréter ce résultat ?

17. 5. Soit X une v. a. r. intégrable définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$; on suppose que l'on a $\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{B}] = E[X]$.
La v. a. r. X est elle alors nécessairement indépendante de $\mathcal{B}$?

17. 6. Soit (X_n) une suite de v. a. r. indépendantes et de même loi $p\delta_1 + (1-p)\delta_0$ et N une variable aléatoire entière, indépendante de la suite (X_n). On pose $N_1 = \sum\limits_{1\leq k\leq N} X_k$ et $N_2 = N - N_1$.

1. Si N suit une loi de Poisson de paramètre λ, montrer que N_1 et N_2 sont deux variables indépendantes et suivant des lois de Poisson.

2. Si N_1 et N_2 sont indépendantes, montrer que N suit une loi de Poisson.

On pourra utiliser les fonctions génératrices de N, N_1 et N_2.

17. 7. On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $r \in \mathbb{N}$ et $a, p \in [0,1]$. On suppose que X suit une loi binomiale $B(r,p)$ et que pour tout $k \in \{0, \ldots, r\}$, la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = k\}$ est la loi binomiale $B(k,a)$.
Montrer que Y suit une loi binômiale $B(r, pa)$.

17. 8. Soit X une v. a. r. de carré intégrable définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\mathcal{F}_n)$ une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$.
Montrer que la suite $(\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_n])$ converge dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vers $\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_{+\infty}]$, où $\mathcal{F}_{+\infty}$ désigne la tribu engendré par l'union des $\mathcal{F}_n$.

17. 9. Soit r et s deux réels et (X,Y,Z) une variable aléatoire gaussienne à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, d'espérance le vecteur de coordonnées $(1,1,1)$ et de matrice de covariance $C = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 \\ r & 1 & s \\ 0 & s & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer en fonction des données $\mathbb{E}[X \,|\, Y]$, puis $\mathbb{E}[X \,|\, \sigma(Y,Z)]$.

2. Pour $y, z \in \mathbb{R}$, donner la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ et $Z = z$.

17. 10. (extrait de l'examen de Janvier 1995) Soit X, Y, Z trois v. a. r. indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer que (X,Y,Z) est une variable aléatoire gaussienne à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, de matrice de covariance la matrice identité de taille 3×3.

2. Montrer que $(X, X+Y, X+Y+Z)$ est une variable aléatoire gaussienne à valeurs dans $\mathbb{R}^3$; donner sa matrice de covariance.

3. Donner la densité du couple $(X, X+Y)$, puis celle de la v. a. r. réelle $X+Y$, enfin la densité de la loi conditionnelle de X sachant que $X+Y = a$, pour a nombre réel fixé.
   En déduire l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X \,|\, X+Y]$.

4. Donner la densité du triplet $(X, X+Y, X+Y+Z)$, celle de la v. a. r. $X+Y+Z$, et la densité de la loi conditionnelle de $(X, X+Y)$ sachant que $X+Y+Z = b$, pour b nombre réel fixé.
   Donner l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X+Y \,|\, X+Y+Z]$.

17. 11. (d'après l'examen de Janvier 1996)
Préliminaire. Soit (X,Y,Z) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que si (X,Y,Z) est une variable aléatoire gaussienne centrée, et si X est orthogonal à Y et à Z, alors X est indépendant de (Y,Z).

Considérons à partir de maintenant (U,V,W) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, telle que $X = U+V, Y = V+W$ et $Z = U+W$ soient des v. a. r. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et indépendantes.

1. Montrer que (X, Y, Z) est une variable aléatoire gaussienne à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. On précisera son espérance et sa matrice de covariance.

2. Montrer que (U, V, W) est une variable aléatoire gaussienne centrée. Montrer que sa matrice de covariance est $C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Calculer $\mathbb{E}[U \mid V]$ et $\mathbb{E}[U \mid W]$.

4. Pour $v \in \mathbb{R}$, donner la loi conditionnelle de U sachant que $V = v$; calculer $\mathbb{E}[U^2 \mid V]$.

5. Trouver les réels a et b tels que la v. a. r. $U + aV + bW$ soit orthogonale à V et à W.

6. Calculer $\mathbb{E}[U \mid \sigma(V, W)]$. En déduire $\mathbb{E}[U \mid V + W]$.

7. Montrer que $\mathbb{E}[U \mid V + W] + \mathbb{E}[U \mid U + W] + \mathbb{E}[U \mid U + V] = U$. Expliquer pourquoi.

17. 12. (extrait de l'examen de Janvier 1997) On considère un couple (X, Y) de v. a. r. intégrables définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que l'on a les égalités : $\mathbb{E}[X \mid Y] = Y$ $\mathbb{P}$-p.s. et $\mathbb{E}[Y \mid X] = X$ $\mathbb{P}$-p.s. On veut montrer que $X = Y$ $\mathbb{P}$-p.s.

1. On suppose d'abord que X et Y sont de carré intégrable.
   (a) Montrer que l'on a $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2]$.
   (b) Montrer que l'on a $\mathbb{E}[(X - Y)^2] = 0$; en déduire que $\mathbb{P}[X = Y] = 1$.

2. On ne suppose plus que X et Y sont de carré intégrable.
   (a) Montrer que pour tout c réel, on a
   $$\mathbb{E}[(X - Y)\, \mathbb{1}_{\{X \leq c\}} \mid X] = 0 \ \mathbb{P}\text{ -p.s. et } \mathbb{E}[(X - Y)\, \mathbb{1}_{\{Y \leq c\}} \mid Y] = 0 \ \mathbb{P}\text{ -p.s.}$$
   (b) En déduire : $\mathbb{E}[(X - Y)(\mathbb{1}_{\{X \leq c\}} - \mathbb{1}_{\{Y \leq c\}})] = 0$ $\mathbb{P}$-p.s.
   puis
   $\mathbb{E}[(X - Y)\, \mathbb{1}_{\{X \leq c, Y > c\}}] + \mathbb{E}[(Y - X)\, \mathbb{1}_{\{X > c, Y \leq c\}}] = 0.$
   (c) En déduire $\mathbb{P}[X \leq c < Y] = 0$ et $P[Y \leq c < X] = 0$.
   (d) Montrer alors que $\mathbb{P}[X = Y] = 1$.

Devoir de Probabilité.

Ce problème démontre le théorème de récurrence de Poincaré (première partie) et l'applique à un problème de développement décimal des nombres réels.

Partie I

Dans toute cette partie *esp* est un espace probabilisé et $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ est une application mesurable qui préserve $\mathbb{P}$. Pour tout entier n strictement positif, on note T^n l'application $T \circ T \circ \ldots \circ T$ où T est composée exactement n fois avec elle-même et l'on pose $T^0 = id_\Omega$, l'application identité de Ω.

Question préliminaire. Si A est une partie de Ω, on note $T^{-n}(A)$ l'image réciproque de A par l'application T^n. Montrer par récurrence que $\mathbb{P}(T^{-n}(A)) = \mathbb{P}(A)$ pour tout entier n positif et toute partie mesurable A.

Si A est une partie de Ω et x est un point de A, on dit que x revient une infinité de fois dans A s'il existe une infinité d'entiers $n \geq 1$ tel que $T^n(x)$ appartient à A.

Dans toute la suite, A est une partie mesurable de Ω dont la mesure $\mathbb{P}(A)$ est strictement positive.

1. Soit B l'ensemble des points x de A tel que $T^n(x)$ appartient à A pour au moins un entier n strictement positif.
   (a) Montrer que B est mesurable.
   (b) On suppose que B est vide. Montrer que A est disjoint de $T^{-j}(A)$ pour tout entier j strictement positif. En déduire que $T^{-k}(A)$ et $T^{-j}(A)$ sont disjoints pour tout couple (k, j) d'entiers positifs distincts.
   (c) Montrer que B ne peut pas être vide (utiliser la question précédente et la question préliminaire).
   (d) On suppose que la mesure de B est strictement plus petite que la mesure de A et l'on note M le complémentaire de B dans A. Montrer que $\mathbb{P}(M) > 0$. Montrer que les ensembles $T^{-j}(M)$, $0 \leq j < +\infty$, sont deux-à-deux disjoints (on pourra reprendre la stratégie de la question **b.**). En déduire une contradiction et conclure que $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)$.
2. On pose $B_0 = B$ et l'on note B_1 l'ensemble des points x de B_0 pour lesquels il existe $n > 0$ vérifiant $T^n(x) \in B_0$. Montrerque $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_0)$ (utiliser la question **1.**).
3. Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite de parties de Ω définie par récurrence de la manière suivante : B_0 et B_1 ont été définis à la question **1** et pour $i \geq 1$ on pose

$$B_{i+1} = \{x \in B_i | \exists n \geq 1,\, T^n(x) \in B_i\}\,.$$

   (a) Montrer que $\mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(A)$ pour tout i positif puis que $\mathbb{P}(\cap_{i\geq 0} B_i) = \mathbb{P}(A)$.

(b) Montrer que $\cap_{i\geq 0} B_i$ est l'ensemble des points de A qui reviennent une infinité de fois dans A. En déduire le théorème suivant :
Théorème de récurrence de Poincaré. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ une application mesurable qui préserve la mesure $\mathbb{P}$. Alors, pour tout $A \in \mathcal{F}$, l'ensemble des points de A qui reviennent une infinité de fois dans A est de mesure totale dans A.

(c) On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue sur les boréliens. Par construction, la translation $T : x \longrightarrow x+1$ est une application mesurable de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui préserve λ. En déduire que le théorème de récurrence de Poincaré est faux si l'on ne suppose pas que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité mais seulement que c'est un espace mesuré.

Partie II

Dans toute cette partie, Ω désigne l'intervalle $[0,1[$ et $\mathcal{F}$ la tribu des boréliens de Ω. Si x est un nombre réel, nous noterons $[x]$ la partie entière de x, c'est-à-dire

$$[x] = sup\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \leq x\}.$$

Cette définition étant posée, on introduit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par la formule $f(s) = 10s - [10s]$.

1. Soit $x \in [0,1[$ et $x = 0, u_1u_2...u_n...$ son écriture décimale (en choisissant pour x nombre décimal, l'écriture qui stationne à 0). Quelle est l'écriture décimale de $f(x)$? Quelle est celle de $f^n(x)$ pour n positif ?

2. (a) Montrer que $f([0,1[) = [0,1[$.
   (b) On note maintenant $T : [,1[\longrightarrow [0,1[$ la restriction de f à l'intervalle $[0,1[$. Tracer le graphe de T.
   (c) Montrer que T préserve la mesure de Lebesgue λ sur $[0,1[$.

3. Soit l un entier strictement positif et a_1, a_2, ..., a_l, l chiffres, c'est-à-dire l entiers compris entre 0 et 9 au sens large. Soit A l'ensemble des points x de $[0,1[$ dont l'écriture décimale commence par $0, a_1a_2a_3 ...a_l$. Montrer que A est un intervalle de mesure de Lebesgue strictement positive. Donner la valeur exacte de $\lambda(A)$.

4. Déduire du théorème de récurrence de Poincaré que "*parmi les points dont l'écriture décimale commence par $0, a_1a_2a_3 ...a_l$, on retrouve presque sûrement la séquence $a_1a_2...a_l$ une infinité de fois dans leur développement décimal*".

5. Montrer que "pour presque tout point x de $[0,1[$, la séquence $a_1a_2...a_l$ apparait une infinité de fois dans le développement décimal de x".

Non inclus dans le poly

17. 13. Fonctions de répartition de mesures. Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ croissante et continue à droite. On veut montrer qu'il existe alors une mesure σ-finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et une seule telle que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on ait : $\mu(]a,b]) = F(b) - F(a)$.
(Par exemple, pour $F(x) = x$, on trouve la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$.)

On prolonge F en une fonction de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ en posant $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et $F(-\infty) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F(x)$. Par convention, pour $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, on note $]a,b) =]a,b]$ si $b < +\infty$ et $]a,b) =]a,+\infty[$ si $b = +\infty$.
Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles de la forme $]a,b)$ où $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$.

1. Prouver d'abord que si une telle mesure existe, elle est unique, σ-finie et qu'elle vérifie pour tout $]a,b) \in \mathcal{I}, \mu(]a,b)) = F(b) - F(a)$.

   Soient $]a,b) \in \mathcal{I}$ et $(]a_n, b_n))$ une suite d'éléments de $\mathcal{I}$.

2. On suppose les ensembles $]a_n, b_n)$ deux à deux disjoints.
   (a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier tel que $\bigcup\limits_{n=1}^{N}]a_n, b_n) \subset]a,b)$. Montrer qu'alors on a : $\sum\limits_{n=1}^{N} (F(b_n) - F(a_n)) \leq F(b) - F(a)$. (Quitte à changer la numérotation, on pourra supposer que $a_N = \sup\limits_{1 \leq n \leq N} a_n$ et faire un raisonnement par récurrence sur N.)
   (b) En déduire que si l'on a $\bigcup\limits_{n \geq 1}]a_n, b_n) \subset]a,b)$, alors :
   $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (F(b_n) - F(a_n)) \leq F(b) - F(a)$.

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier tel que $]a,b) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{n=N}]a_n, b_n)$. Montrer de même que l'on a $F(b) - F(a) \leq \sum\limits_{n=1}^{N} (F(b_n) - F(a_n))$. (On supposera que par exemple $b \in]a_N, b_N)$.)

4. On suppose $]a,b) \subset \bigcup\limits_{n \geq 1}]a_n, b_n)$. Soit $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $[A,B] \subset]a,b)$.
   (a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe une suite (ϵ_n) de réels strictement positifs telle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (F(b_n + \epsilon_n) - F(a_n)) \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (F(b_n) - F(a_n)) + \epsilon$.
   Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $[A,B] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{n=N}]a_n, b_n + \epsilon_n)$.
   (b) En utilisant 3), en déduire qu'on a : $F(B) - F(A) \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (F(b_n) - F(a_n))$.
   (c) En déduire que $F(b) - F(a) \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (F(b_n) - F(a_n))$.

5. Déduire de 2) et 4) que μ est σ-additive sur $\mathcal{I}$.

6. Conclure.