Un peu d'analyse de Fourier.

L'objectif de ce texte est de donner les résultats concernant la transformation de Fourier utiles pour la compréhension d'un cours de base sur le calcul des probabilités cf. E03 et G12 dans notre cursus rennais ; il ne s'agit en aucun cas de présenter cette théorie en détail : ne soyez donc pas surpris de l'aspect minimaliste de ce texte.

Les prérequis sont clairs : un minimum de connaissances en théorie de la mesure et intégration (tribus, mesures, convergence dominée et théorème de Fubini).

1. La transformée de Fourier.

Plaçons-nous sur l'espace mesuré $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right), \lambda_d\right)$ où λ_d désigne la mesure de Lebesgue et rappelons, au moins pour fixer quelques notations, qu'une fonction $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ est intégrable si elle est borélienne et vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|\, d\lambda_d = \int |f|\, d\lambda_d = \int |f(x)|\, dx < +\infty.$$

D'autre part, pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}^d$, on note $|x|$ la norme euclidienne de x et $t \cdot x$ le produit scalaire de t et x.

Soient $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ une application intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et μ une probabilité sur $\mathbb{R}^d$; on définit, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{it\cdot x} f(x)\, dx, \qquad \widehat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{it\cdot x}\, \mu(dx).$$

$\widehat{\mu}$ s'appelle la transformée de Fourier de μ, $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f.

Commençons par établir un résultat élémentaire. Si f est une fonction bornée, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$ et pour tout $\eta > 0$, $\omega_f(\eta) = \sup_{|x-y|\leq\eta} |f(x) - f(y)|$. On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont uniformément continues sur $\mathbb{R}^d$ et bornées ; $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. Rappelons qu'une fonction bornée appartient à $\mathcal{U}$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \omega_f(1/n) = \inf_{\eta>0} \omega_f(\eta) = 0$.

Proposition 1. *Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}^d$. $\widehat{\mu} \in \mathcal{U}$, $\widehat{\mu}(0) = 1$ et $\|\widehat{\mu}\|_\infty \leq 1$.*

Si f est une fonction intégrable alors $\widehat{f} \in \mathcal{U}$ et $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $x \longmapsto e^{it\cdot x}$ est intégrable par rapport à μ : elle est borélienne puisque continue et bornée par 1 qui est une fonction intégrable par rapport à la **probabilité** μ. Donc $\widehat{\mu}$ est définie en tout point de $\mathbb{R}^d$ et

$$|\widehat{\mu}(t)| \leq \int \left|e^{it\cdot x}\right| \mu(dx) = \mu\left(\mathbb{R}^d\right) = 1.$$

Donc $\|\widehat{\mu}\|_\infty \leq 1$. Clairement $\widehat{\mu}(0) = \mu\left(\mathbb{R}^d\right) = 1$.

Montrons que $\widehat{\mu}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$. Pour $s \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a, $\left|e^{it\cdot x} - e^{is\cdot x}\right| \leq \min(2, |t-s||x|)$ de sorte que

$$|\widehat{\mu}(t) - \widehat{\mu}(s)| \leq \int \left|e^{it\cdot x} - e^{is\cdot x}\right| \mu(dx) \leq \int \min(2, |x|\,|t-s|)\, \mu(dx)\ ;$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega_{\widehat{\mu}}(1/n) \leq \int \min(2, |x|/n)\, \mu(dx)$. Montrons, à l'aide du théorème de convergence dominée, que le majorant de l'inégalité précédente tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\lim_{n\to+\infty} \min(2, |x|/n) = 0$; de plus $\sup_{n\geq 1} |\min(2, |x|/n)| \leq 2$. μ étant une mesure finie, les constantes sont intégrables par rapport à μ. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} \int \min(2, |x|/n)\, \mu(dx) = 0.$$

Finalement, $\lim_{n\to+\infty} \omega_{\widehat{\mu}}(1/n) = 0$: $\widehat{\mu}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.

La deuxième assertion (qui est en fait la même lorsqu'on connaît les mesures complexes !) se démontre de la même façon : essayez et si vous n'y arrivez pas **demandez** ! ! $\square$

Convolution. Introduisons à présent le produit de convolution de deux fonctions. Soient f et g deux fonctions boréliennes. On définit la fonction $f \star g$ par

$$f \star g(x) = \int f(x-y) g(y)\, dy.$$

Le domaine de définition de $f \star g$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^d$ tels que

$$\int |f(x-y)g(y)|\, dy < +\infty.$$

Remarquons que si x appartient au domaine de définition de $f \star g$, on a via $z = x - y$,

$$f \star g(x) = \int f(z) g(x-z)\, dz.$$

Proposition 2. *Soit $f \in \mathcal{U}$ et g une fonction intégrable. $f \star g \in \mathcal{U}$ et $\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$.*

Si en outre f est intégrable alors $f \star g$ est intégrable et $\widehat{f \star g} = \widehat{f}\, \widehat{g}$.

Démonstration. $f \star g$ est définie en tout point de $\mathbb{R}^d$ puisque

$$\int |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy = |f| \star |g|(x) \leq \|f\|_\infty \|g\|_1 < +\infty.$$

Cette inégalité montre aussi que $\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$ puisque $|f \star g| \leq |f| \star |g|$.

Soient $x \in \mathbb{R}^d$ et $z \in \mathbb{R}^d$. On a

$$|(f \star g)(x) - (f \star g)(z)| \leq \int |f(x-y) - f(z-y)|\, |g(y)|\, dy,$$

de sorte que $\omega_{f\star g}(1/n) \leq \omega_f(1/n)\, \|g\|_1$ et $f \star g \in \mathcal{U}$.

Si f est de plus intégrable, puisque $|f \star g| \leq |f| \star |g|$,

$$\|f \star g\|_1 \leq \||f| \star |g|\|_1 = \int \left(\int |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy \right) dx.$$

La fonction $(x, y) \longmapsto |f(x-y)|\, |g(y)|$ est positive et borélienne ; le théorème de Tonelli conduit à l'inégalité, la mesure de Lebesgue étant invariante par translation (ou via $z = x - y$),

$$\|f \star g\|_1 \leq \||f| \star |g|\|_1 \leq \int |g(y)| \left(\int |f(x-y)|\, dx \right) dy = \|g\|_1 \|f\|_1.$$

Soit $t \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{f \star g}(t) = \int e^{it\cdot x}(f \star g)(x)\,dx = \int e^{it\cdot x}\left(\int f(x-y)g(y)\,dy\right)dx.$$

Appliquons le théorème de Fubini : $(x,y) \longmapsto e^{it\cdot x} f(x-y)g(y)$ est borélienne puisque f et g le sont et $\left|e^{it\cdot x} f(x-y)g(y)\right| = |f(x-y)||g(y)|$ est intégrable puisque

$$\int |f(x-y)||g(y)|\,dxdy = \||f| \star |g|\|_1 \leq \|g\|_1\,\|f\|_1.$$

On obtient, en écrivant $e^{it\cdot x} = e^{it\cdot y}e^{it\cdot(x-y)}$,

$$\widehat{f \star g}(t) = \int e^{it\cdot y} g(y)\left(\int e^{it\cdot(x-y)} f(x-y)\,dx\right)dy,$$

puis en utilisant le changement de variable $z = x-y$ (ou l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue)

$$\widehat{f \star g}(t) = \widehat{f}(t)\,\widehat{g}(t). \quad \square$$

Rappelons un petit résultat technique. Dans la suite, $K : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction positive, intégrable et d'intégrale 1. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_n(x) = n^d\,K(nx)$.

Lemme 3. *Soit $f \in \mathcal{U}$. Alors $(f \star K_n)_{n\geq 1}$ converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, via le changement de variable $z = ny$,

$$f \star K_n(x) = \int f(x-y)n^d K\left(ny\right)\,dy = \int f(x - z/n)K(z)\,dz.$$

Ainsi, comme $f(x) = \int f(x)K(z)\,dz$,

$$\|(f \star K_n) - f\|_\infty \leq \int \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x-z/n) - f(x)|K(z)\,dz.$$

f étant uniformément continue, pour tout $z \in \mathbb{R}^d$, $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x-\varepsilon z) - f(x)|$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$; de plus nous avons la majoration

$$\sup_{n\geq 1}\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x-z/n) - f(x)|\,|K(z)| \leq 2\|f\|_\infty |K(z)|$$

qui permet de conclure en utilisant le théorème de convergence dominée. $\square$

2. Formule d'inversion élémentaire.

On prend désormais $K(x) = (2\pi)^{-d/2}e^{-\frac{|x|^2}{2}}$. Ce n'est pas le seul choix possible pour établir le résultat qui suit ; toutefois la formule $\widehat{K} = (2\pi)^{d/2}K$ le rend très populaire.

Théorème 4 (Formule d'inversion). *Soit $\mathcal{A} = \left\{f \in \mathcal{U} : f \text{ et } \widehat{f} \text{ sont intégrables}\right\}$.*

$\mathcal{C}_c \subset \overline{\mathcal{A}}$: si g est continue à support compact et $\varepsilon > 0$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. De plus si $f \in \mathcal{A}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad f(x) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-it\cdot x}\widehat{f}(t)\,dt.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{U}$ intégrable ; $(f \star K_n)_{n \geq 1}$ converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}^d$ via le lemme 3. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f \star K_n$ appartient à $\mathcal{A}$. D'après la Proposition 2, $f \star K_n$ est une fonction intégrable qui appartient à $\mathcal{U}$ et $\widehat{f \star K_n} = \widehat{f}\,\widehat{K_n} = \widehat{f}\,\widehat{K}(\cdot/n)$ est également intégrable puisque $\widehat{f}$ est bornée et $\widehat{K}$ intégrable. Donc $f \star K_n \in \mathcal{A}$. Comme $f \star K_n$ converge uniformément vers f, on a $\mathcal{C}_c \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{L}^1 \subset \overline{\mathcal{A}}$. Le résultat de densité s'en suit.

Soit $f \in \mathcal{A}$. Puisque $\widehat{K} = (2\pi)^{d/2}\, K$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$K(x) = (2\pi)^{-d/2}\, \widehat{K}(x) = (2\pi)^{-d/2} \int e^{it\cdot x} K(t)\, dt.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $y \in \mathbb{R}^d$, via $s = nt$,

$$K_n(x-y) = n^d K\left(n(x-y)\right) = n^d (2\pi)^{-d/2} \int e^{it\cdot n(x-y)} K(t)\, dt = (2\pi)^{-d/2} \int e^{is\cdot(x-y)} K(s/n)\, ds,$$

de sorte que

$$(f \star K_n)(x) = (2\pi)^{-d/2} \int f(y) \left(\int e^{is\cdot(x-y)} K(s/n)\, ds \right) dy.$$

On a l'inégalité $\left| f(y) e^{is\cdot(x-y)} K(s/n) \right| \leq |f(y)|\, |K(s/n)|$: puisque f et K sont intégrables, on peut appliquer le théorème de Fubini pour obtenir

$$(f \star K_n)(x) = (2\pi)^{-d/2} \int e^{is\cdot x} K(s/n) \left(\int e^{-isy} f(y)\, dy \right) ds = (2\pi)^{-d/2} \int e^{is\cdot x} K(s/n) \widehat{f}(-s)\, ds.$$

Si f appartient à $\mathcal{A}$, $f \in \mathcal{U}$ et donc , pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} (f \star K_n)(x) = \lim_{n\to+\infty} \int e^{it\cdot x} (2\pi)^{-d/2} K(t/n) \widehat{f}(-t)\, dt \ ;$$

mais $\widehat{f}$ est intégrable et le théorème de convergence dominée conduit à l'égalité

$$\lim_{n\to+\infty} \int e^{it\cdot x} (2\pi)^{-d/2} K(t/n) \widehat{f}(-t)\, dt = \int e^{it\cdot x} (2\pi)^{-d} \widehat{f}(-t)\, dt = (2\pi)^{-d} \int e^{-it\cdot x} \widehat{f}(t)\, dt$$

ce qui établit la formule. □

3. Applications aux probabilités.

Théorème 5 (Injectivité de la transformation de Fourier)**.** *Soient μ une probabilité sur $\mathbb{R}^d$ et $f \in \mathcal{A}$.*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \mu(dx) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) \widehat{\mu}(-t)\, dt.$$

En particulier, si, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $\widehat{\mu}(t) = \widehat{\nu}(t)$ alors $\mu = \nu$.

Démonstration. D'après le résultat précédent, on a, si $f \in \mathcal{A}$,

$$\int f(x)\, \mu(dx) = (2\pi)^{-d} \int \left(\int e^{-it\cdot x} \widehat{f}(t)\, dt \right) \mu(dx),$$

et, $\widehat{f}$ étant intégrable, le théorème de Fubini donne

$$\int f(x)\,\mu(dx) = (2\pi)^{-d} \int \widehat{f}(t) \int e^{-it\cdot x}\,\mu(dx)\,dt = (2\pi)^{-d} \int \widehat{f}(t)\widehat{\mu}(-t)\,dt.$$

Si μ et ν sont deux probabilités telles que $\widehat{\mu} = \widehat{\nu}$, pour tout f appartenant à $\mathcal{A}$,

$$\int f(x)\,\mu(dx) = (2\pi)^{-d} \int \widehat{f}(t)\widehat{\mu}(-t)\,dt = (2\pi)^{-d} \int \widehat{f}(t)\widehat{\nu}(-t)\,dt = \int f(x)\,\nu(dx)$$

ce qui montre que $\mu = \nu$ puisque $\mathcal{C}_c \subset \overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}_b$ cf. Théorème 8. $\square$

Proposition 6 (Formule d'inversion). *Soit μ une probabilité. Si $\widehat{\mu}$ est intégrable, μ a pour densité*

$$p(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-it\cdot x}\widehat{\mu}(x)\,dx.$$

Démonstration. Si $f \in \mathcal{A}$ on a

$$\int f(x)\,\mu(dx) = (2\pi)^{-d} \int \widehat{f}(t)\widehat{\mu}(-t)\,dt = (2\pi)^{-d} \int \left(\int e^{it\cdot x} f(x)\,dx\right) \widehat{\mu}(-t)\,dt.$$

Puisque f et $\widehat{\mu}$ sont intégrables, le théorème de Fubini conduit à

$$\int f(x)\,\mu(dx) = (2\pi)^{-d} \int f(x) \left(\int e^{it\cdot x}\widehat{\mu}(-t)\,dt\right) dx = \int f(x)p(x)\,dx.$$

En particulier p est une fonction positive puisque si $x_0 \in \mathbb{R}^d$ pour $f(x) = K_n(x_0 - x)$ on a, p étant uniformément continue via la Proposition 1,

$$p(x_0) = \lim_{n\to+\infty} (K_n \star p)(x_0) = \lim_{n\to+\infty} \int K_n(x_0 - x)p(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int K_n(x_0 - x)\,\mu(dx) \geq 0.$$

p est intégrable puisque par convergence monotone

$$\int p(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} (2\pi)^{d/2} \int K(x/n)p(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} (2\pi)^{d/2} \int K(x/n)\,\mu(dx) = 1.$$

Finalement les deux probabilités μ d'une part et ν de densité p d'autre part sont égales puisqu'elles coïncident sur $\mathcal{A}$ (cf. Théorème 8). $\square$

Théorème 7 (Paul Lévy). *Soient $(\mu_n)_{n\geq 1}$ et μ des probabilités sur $\mathbb{R}^d$.*

$(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge étroitement vers μ si et seulement si $(\widehat{\mu_n})_{n\geq 1}$ converge simplement vers $\widehat{\mu}$ sur $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. La condition est nécessaire puisque, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $x \longmapsto e^{it\cdot x}$ est continue bornée.

Montrons que la condition est suffisante. Pour $f \in \mathcal{A}$, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int f\,d\mu_n = (2\pi)^{-d} \int \widehat{f}(t)\widehat{\mu_n}(-t)\,dt.$$

$\widehat{f}(t)\widehat{\mu_n}(-t) \longrightarrow \widehat{f}(t)\widehat{\mu}(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ et de plus $\sup_{n\geq 1} \left|\widehat{f}(t)\widehat{\mu_n}(-t)\right| \leq \left|\widehat{f}(t)\right|$ qui est intégrable puisque $f \in \mathcal{A}$. Le théorème de convergence dominée implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \int f\,d\mu_n = (2\pi)^{-d} \lim_{n\to+\infty} \int \widehat{f}(t)\widehat{\mu_n}(-t)\,dt = (2\pi)^{-d} \int \widehat{f}(t)\widehat{\mu}(-t)\,dt = \int f\,d\mu\ ;$$

comme $\mathcal{C}_c \subset \overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}_b$, le Théorème 9 fournit le résultat. $\square$

A. Annexe.

Rappelons tout d'abord que deux probabilités qui coïncident sur $\mathcal{I}$ où $\mathcal{I}$ est une classe de parties stable par intersection finie sont égales sur $\sigma(\mathcal{I})$. Une conséquence de ce résultat est le théorème suivant.

Théorème 8. *Soient μ et ν deux probabilités sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}_b$ tel que $\mathcal{C}_c \subset \overline{\mathcal{H}}$, l'adhérence étant prise pour $\|\cdot\|_\infty$.*

Alors μ et ν sont égales sur $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ dès que

$$\forall f \in \mathcal{H}, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\nu.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que

$$\int f \, d\mu = \int f \, d\nu \tag{1}$$

pour toute $f \in \mathcal{C}_c$ (positive) et montrons que $\mu = \nu$. Soient K un compact de $\mathbb{R}^d$ et G un ouvert de $\mathbb{R}^d$ tel que $K \subset G$ et $\bar{G}$ est compact. Posons $f(x) = d(x, G^c)/\left(d(x,K) + d(x,G^c)\right)$ où $d(x,A) = \inf\{|x-y| : y \in A\}$. f est continue sur $\mathbb{R}^d$ et de plus $0 \leq f(x) \leq 1$. f est à support compact puisque $f(x) = 0$ si et seulement si $x \in G^c$ et de plus $f(x) = 1$ si et seulement si $x \in K$. Par suite, f^n décroît vers $\mathbf{1}_K$ et donc, par convergence dominée ($\sup_n |f^n| \leq 1$)

$$\mu(K) = \lim_{n\to+\infty} \int f^n \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f^n \, d\nu = \nu(K).$$

Le résultat se déduit alors directement du théorème d'égalité de deux probabilités puisque les compacts engendrent la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ et sont stables par intersection finie.

Supposons à présent (1) valable seulement pour $h \in \mathcal{H}$. Soient $f \in \mathcal{C}_c$ et $h \in \mathcal{H}$. On a

$$\left| \int f \, d\mu - \int h \, d\mu \right| \leq \int |f - h| \, d\mu \leq \|f - h\|_\infty,$$

et par suite, l'inégalité précédente étant aussi valable pour ν,

$$\left| \int f \, d\mu - \int f \, d\nu \right| \leq 2\|f-h\|_\infty + \left| \int h \, d\mu - \int h \, d\nu \right| = 2\|f-h\|_\infty \ ;$$

ce qui donne le résultat puisque, comme $f \in \overline{\mathcal{H}}$, $\inf\{\|f-h\|_\infty : h \in \mathcal{H}\} = 0$. □

Dans le même ordre d'idées, on peut établir le résultat suivant.

Théorème 9. *Soient $(\mu)_{n\geq 1}$ et μ des probabilités sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}_b$ tel que $\mathcal{C}_c \subset \overline{\mathcal{H}}$.*

Alors $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge étroitement vers μ si et seulement si

$$\forall f \in \mathcal{H}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu.$$

Pour une démonstration,

`http ://perso.univ-rennes1.fr/philippe.briand/proba/proba.html`