

Module G12 :

Quelques exercices sur le calcul des probabilités

Hélène GUÉRIN, Florent MALRIEU, Aurélie MULLER

helene.guerin@univ-rennes1.fr, florent.malrieu@univ-rennes1.fr, muller@lyon.cemagref.fr

[http ://perso.univ-rennes1.fr/philippe.briand/proba/](http://perso.univ-rennes1.fr/philippe.briand/proba/)

1. Généralités sur les probabilités

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } 1\}.$$

Montrer que \mathcal{G} est une tribu.

Exercice 2. 1. Soient (E_1, \mathcal{E}_1) et (E_2, \mathcal{E}_2) deux espace mesurables. On suppose que $\mathcal{E}_i = \sigma(\mathcal{C}_i)$ avec $E_i \in \mathcal{C}_i$.

(a) Montrer que la tribu $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ est engendrée par les pavés $C_1 \times C_2$ où $C_i \in \mathcal{C}_i$.

(b) En déduire que $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbf{R}^{d+n})$.

2. (a) Soit $X = (X_1, X_2)$ une application à valeurs dans $E_1 \times E_2$ (définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$). Montrer que X est une v.a. si et seulement si X_1 et X_2 sont des v.a.

(b) En déduire les propriétés algébriques des v.a.

Exercice 3. Soit $(A_n)_{\mathbf{N}}$ une suite d'événements. Montrer que

$$\mathbb{P}(\liminf A_n) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup A_n).$$

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. Comparer les événements $\{\limsup_{n \rightarrow +\infty} X_n > 1\}$ et $\limsup \{X_n > 1\}$ puis $\{\limsup_{n \rightarrow +\infty} X_n \geq 1\}$ et $\limsup \{X_n \geq 1\}$.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{\mathbf{N}}$ une suite de v.a. numériques définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon_n) < +\infty$ où $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ est une suite de réels positifs convergeant vers 0. Montrer que $(X_n)_{\mathbf{N}}$ converge presque sûrement vers 0.

Exercice 6. Soit X une v.a.r. normale centrée réduite définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Calculer, pour tout réel s , $\mathbb{E}[e^{sX}]$. En déduire que $e^{s|X|}$ est intégrable pour tout $s \in \mathbf{R}$.

2. Montrer que $z \mapsto \mathbb{E}[e^{zX}]$ est analytique sur \mathbf{C} .

3. En déduire que $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Exercice 7. On considère la fonction réelle $u(x) = (1 + |x|)^{-1}$.

1. Soit X une variable réelle. On considère, pour $s \geq 0$, $\theta(s) = \mathbb{E}[u(sX)]$.

Montrer que θ est continue sur $[0, +\infty[$, de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$. Exprimer $\theta'(s)$ comme une espérance. Déterminer $\lim_{s \rightarrow +\infty} \theta(s)$.

2. Soient U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $c \in]0, 1[$. On considère la variable aléatoire $X = (U - c)^+$. Calculer, pour la variable X , $\theta(s)$ puis $\lim_{s \rightarrow +\infty} \theta(s)$. Est-ce cohérent avec la question précédente ?

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$ c'est à dire de densité $p(x) = \pi^{-1}(1 + x^2)^{-1}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = X^{-1}$.

Exercice 9. Soit X une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. Quelle est la loi de $1 + [X]$? ($[x]$ désigne la partie entière de x)

Exercice 10. Soit X de loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$. On construit une v.a. Y en posant $Y(\omega) = X(\omega)/2$ si $X(\omega)$ est pair, $Y(\omega) = (1 + X(\omega))/2$ si $X(\omega)$ est impair.

Déterminer la loi de la v.a. Y .

Exercice 11. Soit $U = (X, Y)$ une v.a. dans \mathbf{R}^2 de densité $(x, y) \mapsto ke^{-x}\mathbf{1}_{0 < |y| < x}$.

1. Quelle est la valeur de k ?
2. Déterminer les lois marginales.
3. Quelle est la loi du vecteur $(\frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2})$?

Exercice 12. Soit (U, V) une v.a. dans \mathbf{R}^2 de densité $\mathbf{1}_{]0,1[}(u)\mathbf{1}_{]0,1[}(v)$.

1. Déterminer la loi du vecteur (X, Y) où $X = \sqrt{-2 \ln U} \cos(2\pi V)$, $Y = \sqrt{-2 \ln U} \sin(2\pi V)$.
2. Quelle est la loi de X/Y ?
3. On note $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Déterminer la loi de $(X/R, R)$.

Exercice 13. Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F . Calculer $\mathbb{E}[F(X)]$.

Exercice 14. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F donnée par $F(t) = [t]/(1 + [t])$ si $t \geq 0$, $F(t) = 0$ si $t < 0$.

Calculer pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbb{P}(X = n)$. Calculer $\mathbb{P}(1 < X \leq 3)$, $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4)$ et $\mathbb{P}(X < 12)$. X possède-t-elle une densité ? X est-elle intégrable ?

Exercice 15. Soit F la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad F(t) = \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \mathbf{1}_{[\frac{1}{i}, +\infty[}(t).$$

1. Montrer que F est une fonction de répartition.
2. Soit X une var de fonction de répartition F .
 - (a) Calculer $\mathbb{P}(X < 0)$, $\mathbb{P}(X \leq 0)$, $\mathbb{P}(X \geq 1)$, $\mathbb{P}(X > 1)$, $\mathbb{P}(0 \leq X < \frac{1}{2})$.
 - (b) Déterminer la fonction de répartition de la var $Y = 1/X$. Y est-elle intégrable ?

2. Indépendance

Exercice 16. Soient X_0, \dots, X_n $n+1$ v.a. réelles indépendantes et identiquement distribuées ; soit N une v.a. de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ indépendante de X_0, \dots, X_n . On pose

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega).$$

Exprimer la fonction caractéristique de Y en fonction de celle de X_1

Exercice 17. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On note Y et Z le quotient et le reste de la division euclidienne de $X + 2$ par 3.

Quelles sont les valeurs prises par les variables Y et Z ? Déterminer les lois de ces deux variables ? Sont-elles indépendantes ?

Exercice 18. Soient X et Y deux v.a. indépendantes ; X de loi géométrique de paramètre p , Y de loi géométrique de paramètre p' . Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 19. Soient X une variable aléatoire réelle et N suivant la loi de Poisson de paramètre $\alpha > 0$; X et N indépendantes. On considère la variable aléatoire $U = X^N$ ($U = 1$ si $N = 0$). On note $G(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$.

1. Montrer que U est intégrable si et seulement si $\mathbb{E}[e^{\alpha|X|}] < +\infty$.
2. Dans ce cas, exprimer $\mathbb{E}[U]$ en fonction de G .
3. Si X suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, montrer que U est intégrable et calculer $\mathbb{E}[U]$.

Exercice 20. Soient X et Y deux v.a. réelles indépendantes et identiquement distribuées. On pose $U = \min(X, Y)$, $V = X - Y$.

1. Déterminer la fonction de répartition de U (resp. de $\max(X, Y)$).
2. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. Quelle est la loi de (U, V) ? U et V sont-elles indépendantes?

Exercice 21. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes.

1. Montrer que si $X + Y$ est intégrable alors X et Y le sont.
2. Montrer que si $X + Y$ est presque sûrement constante alors X et Y le sont également.

Exercice 22. Soient X et Y deux v.a. réelles indépendantes.

1. On suppose que X suit la loi de Cauchy de paramètre $\alpha > 0$ et que Y suit celle de Cauchy de paramètre $\beta > 0$. Quelle est la loi de $X + Y$?

Si $\alpha = \beta$, montrer que, pour tous a et b positifs, $aX + bY$ a la même loi que $(a + b)X$.

2. On suppose que X et Y suivent la même loi symétrique – i.e. X et $-X$ ont même loi – et que $aX + bY$ a la même loi que $(a + b)X$ pour tous a et b positifs.

Montrer que si X n'est pas presque sûrement constante alors X suit une loi de Cauchy.

Exercice 23. Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes, de carré intégrable et de même loi. On note $m = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = \sigma^2(X_1)$. On définit par récurrence :

$$Y_1 = X_1/2, \quad Y_n = (Y_{n-1} + X_n)/2, \quad n \geq 2.$$

1. Calculer $\mathbb{E}[Y_n]$ et $\mathbb{V}(Y_n)$ en fonction de n , m et σ^2 .
2. Si X_1 suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, quelle est la loi de Y_n ?

Exercice 24. Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi μ et B un borélien de \mathbf{R} tel que $0 < \mu(B) < 1$.

On note τ_1 le temps d'entrée dans B c'est à dire

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \tau_1(\omega) = \inf\{n > 0 : X_n(\omega) \in B\} \quad \text{avec } \inf \emptyset = +\infty.$$

1. (a) Pour $k \in \mathbf{N}^*$, expliciter les événements $\{\tau_1 = k\}$ et $\{\tau_1 > k\}$.
 (b) τ_1 est-il fini presque sûrement? Déterminer la loi de τ_1 .
 (c) On s'amuse à lancer un dé équilibré. En moyenne :
 – combien de lancers sont nécessaires pour l'obtention d'un 6?
 – quel est le total des points jusqu'au premier 6?

2. On pose $\tau_0 = 0$ et pour $k \in \mathbf{N}$

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \tau_{k+1}(\omega) = \inf\{i > \tau_k(\omega), X_i(\omega) \in B\}.$$

- (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, τ_k est fini presque sûrement.
- (b) Montrer que les variables $(\tau_{k+1} - \tau_k)_{\mathbf{N}}$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

Exercice 25. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$ où $0 < p < 1$ On pose, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\sigma(\omega) = \inf\{i \geq 1, X_i(\omega) = 0\}, \quad \tau(\omega) = \inf\{i \geq 1, X_i(\omega) = 1\},$$

avec la convention $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(\tau = +\infty) = \mathbb{P}(\sigma = +\infty) = 0$ et déterminer la loi de σ et τ .
2. On définit, pour $\omega \in \Omega$, $T(\omega) = \inf\{i \geq 2, X_{i-1}(\omega) = 0, X_i(\omega) = 1\}$ avec la même convention.
 - (a) Montrer que $T \geq \sigma + 1$ et que $T(\omega) = \inf\{i > \sigma(\omega), X_i(\omega) = 1\}$. En déduire que $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$.
 - (b) Montrer que, si $k \geq 2$, $\{T = k\} = \bigcup_{i=1}^{k-1} \{T = k\} \cap \{\sigma = i\}$. En déduire la loi de T : pour $k \geq 2$, notant $q = 1 - p$,

$$\mathbb{P}(T = k) = \frac{pq}{q-p} (q^{k-1} - p^{k-1}) \quad \text{si } p \neq q.$$

Déterminer la série génératrice de T ainsi que sa moyenne.

Exercice 26. Soient $(\mathcal{F}_n)_{\mathbf{N}}$ une suite de sous-tribus de \mathcal{F} et $(\alpha_r)_{\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs tendant vers 0. On suppose que

$$\forall r \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall A \in \sigma(\mathcal{F}_i, i \leq n), \forall B \in \sigma(\mathcal{F}_i, i > n+r), \quad |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \alpha_r.$$

Montrer que, pour tout événement asymptotique de \mathcal{F}_n , $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1.

Exercice 27. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. On note, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Les événements

$$\{X_n \longrightarrow 0\}, \quad \{\limsup X_n < +\infty\}, \quad \{\limsup S_n < +\infty\}, \quad \{n^{-1}S_n \text{ converge dans } \mathbf{R}\},$$

$$\limsup\{S_n = 0\}, \quad \{(S_n)_{n \geq 1} \text{ converge dans } \mathbf{R}\}, \quad \{(S_n)_{n \geq 1} \text{ converge vers } S \leq c\}$$

sont-ils des événements asymptotiques de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$?

Exercice 28. Soit $(X_n)_{\mathbf{N}}$ une suite de v.a.r. indépendamment distribuées.

1. Soit $p \in [1, +\infty[$ et $c > 0$.
 - (a) Montrer que si $\mathbb{E}[|X_0|^p] < +\infty$ alors $\mathbb{P}(\limsup\{|X_n| > cn^{1/p}\}) = 0$.
 - (b) Montrer la réciproque dans le cas indépendant.

On suppose désormais les $(X_n)_{\mathbf{N}}$ indépendantes.
2. Montrer que si $\mathbb{P}(X_0 \neq 0) > 0$ alors $\sum_n |X_n| = +\infty$ \mathbb{P} -p.s.
3. On se propose d'étudier le rayon de convergence R de la série entière $\sum_n X_n z^n$. On suppose que $\mathbb{P}(X_0 \neq 0) > 0$.
 - (a) Montrer à l'aide de la question précédente que $R \leq 1$ \mathbb{P} -p.s.
 - (b) En utilisant la première question, montrer que si $\mathbb{E}[\ln^+(|X_0|)] < +\infty$ alors $R = 1$ \mathbb{P} -p.s. et que dans le cas contraire $R = 0$ \mathbb{P} -p.s.
 - (c) Pouvaient-on prévoir que R était presque sûrement constant ?

3. Convergence de variables aléatoires

Exercice 29. Soit $(f_n)_{\mathbf{N}}$ la suite de fonctions de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} définie comme suit : $f_n(x) = 2^n$ s'il existe un entier k tel que $2^{-n}k \leq x < 2^{-n}k + 2^{-2n}$, $f_n(x) = 0$ dans le cas contraire. Montrer que $(f_n)_{\mathbf{N}}$ converge vers 0 presque partout.

Exercice 30. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes toutes de loi exponentielle de paramètre 1. On pose, pour tout $n \geq 1$, $Y_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. Montrer que, presque sûrement,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{\ln n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Y_n}{\ln n} = 1.$$

Exercice 31. Soit, pour $n \geq 1$, X_n une v.a.r. de Cauchy de paramètre 3^{-n} . On pose, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Montrer que $(S_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement dans \mathbf{R} . Déterminer la loi de la limite lorsque les $(X_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes.

Exercice 32. Soient $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, X et Y des variables aléatoires réelles ; $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers X en probabilité.

1. On suppose dans cette question que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|X_n| \leq Y$ presque sûrement.
 - (a) Montrer que $|X| \leq Y$ presque sûrement.
 - (b) Montrer que si Y est bornée $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers X dans L^p pour tout réel $p \geq 1$.
 - (c) On suppose que $Y \in L^p$. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers X dans L^p .
2. Montrer que $\mathbb{E}[|X|] \leq \liminf \mathbb{E}[|X_n|]$.

Indic. : Si $x \geq 0$ et $r \geq 0$, $x \geq \min(x, r)$.

Exercice 33 (Difficile!). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. numériques. On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est *équi-intégrable* si

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|X_n| \mathbf{1}_{|X_n| > a}] = 0. \quad (1)$$

1. (a) Montrer qu'une v.a. intégrable est équi-intégrable.
 - (b) Montrer que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est équi-intégrable dans les deux cas suivants :
 - (i) il existe une v.a. Y intégrable telle que, pour tout n , $|X_n| \leq Y$ presque sûrement ;
 - (ii) $(X_n)_{\mathbf{N}}$ est bornée dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pour $p > 1$.
 - (c) En déduire qu'un nombre fini de v.a. intégrables est équi-intégrable.
 - (d) Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ est équi-intégrable si et seulement si

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[(|X_n| - a)^+] = 0.$$

2. Soit $(X_n)_{n \geq 1} \subset L^1$ et X une variable aléatoire. Montrer que la suite $(X_n)_{\mathbf{N}}$ converge vers X dans L^1 si et seulement si $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers X et $(X_n)_{n \geq 1}$ est équi-intégrable.

Indic : $\mathbb{E}[|X_n - X|] = \mathbb{E}[\min(|X_n - X|, a)] + \mathbb{E}[(|X_n - X| - a)^+]$; $x \mapsto (x - a)^+$ est convexe et croissante sur \mathbf{R}_+ .

Exercice 34. Soit $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue, strictement croissante et bornée telle que $f(0) = 0$.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $(X_n)_{n \geq 1}$ converge vers X en probabilité ;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(|X_n - X|)] = 0$.

En pratique : $f(x) = \min(x, 1)$ ou $f(x) = x/(1+x)$.

Exercice 35 (Lemme de Scheffé). Soient $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \subset L^1$ et X des v.a.r. positives. On suppose que la suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers X en probabilité. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers X dans L^1 si et seulement si X est intégrable et $\mathbb{E}[X_n] \rightarrow \mathbb{E}[X]$.

Exercice 36. Soit X une variable aléatoire de loi donnée par $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$. On définit $X_n = X$ si n est pair, $X_n = -X$ si n est impair et $Y_n = X$ pour tout n . Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge en loi vers X puis que la suite des couples (X_n, Y_n) ne converge pas en loi.

Exercice 37. Soient $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et X des variables à valeurs dans \mathbf{N} . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers X en loi ;
- (ii) pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$;
- (iii) G_{X_n} converge simplement vers G_X sur $[0, 1]$.

Exercice 38. Soient $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$, X des v.a.r. et D une partie dense de \mathbf{R} . On suppose que $F_{X_n}(t)$ converge vers $F_X(t)$ pour tout $t \in D$. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers X en loi.

Exercice 39. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, Y_n est une v.a. de loi géométrique de paramètre α/n où $\alpha > 0$ et $X_n = Y_n/n$. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une v.a. X de loi exponentielle de paramètre α .

Exercice 40. Soient $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et X des v.a.r. de densité respectives p_n et p . Montrer que si p_n converge vers p dans L^1 alors X_n converge vers X en loi. Montrer que la réciproque est fautive.

Exercice 41. Soient $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et X des variables à valeurs dans $\{0\} \cup \{k^{-1} : k \in \mathbf{N}^*\}$.

1. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge en loi vers X si et seulement si,

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k^{-1}) = \mathbb{P}(X = k^{-1}).$$

2. A-t-on $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X = 0)$?

Exercice 42. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. suivant la loi de Cauchy de paramètre $c > 0$. On pose, pour tout $n \geq 1$, $Y_n = (\max_{1 \leq k \leq n} X_k)/n$. Montrer que $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $1/T$ où T suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

4. Loi des grands nombres ; séries de v.a.

Si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables indépendantes, on note, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad M_n = \frac{S_n}{n}.$$

Exercice 43. Soient $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. On note pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad S_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{U_i \leq x}, \quad M_n(x) = n^{-1} S_n(x), \quad B_n(x) = \mathbb{E}[f(M_n(x))].$$

1. (a) Quelle est la loi de $S_n(x)$, sa moyenne, sa variance ?
- (b) Montrer que B_n est un polynôme.
2. (a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n(x) = f(x)$.
- (b) Établir l'inégalité

$$\forall x \in [0, 1], \quad \forall \eta > 0, \quad \mathbb{P}(|M_n(x) - x| > \eta) \leq \frac{x(1-x)}{n\eta^2} \leq \frac{1}{4n\eta^2}.$$

(c) En déduire que $(B_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers f uniformément sur $[0, 1]$. On pourra remarquer que $|B_n(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}[|f(M_n(x)) - f(x)|]$ et utiliser l'inégalité précédente.

Exercice 44. Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de v.a.r. i.i.d. telle que X_1 est intégrable. On note, pour $n \geq 1$, $M_n = n^{-1}S_n$.

1. Déterminer la fonction caractéristique de M_n .
2. En déduire que $(M_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge en probabilité vers $m = \mathbb{E}[X_1]$.

Exercice 45. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. suivant la loi normale centrée réduite. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} X_n n^{-1} \sin(n\pi x)$ converge presque sûrement pour tout réel x .

Exercice 46. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. On note, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$I_n = \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_n f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n.$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 47. 1. Soient $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes de carré intégrable et $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de réels strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$. On suppose que

$$b_n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] \rightarrow m, \quad \sum_{n \geq 1} b_n^{-2} \mathbb{V}(X_n) < +\infty.$$

Montrer que $(b_n^{-1}S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers m presque sûrement et dans L^2 .

2. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements indépendants telle que $\sum \mathbb{P}(A_n) = +\infty$. On note, pour $n \geq 1$, $b_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}(A_k)$. Montrer que la suite $\left(b_n^{-1} \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{A_k}\right)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers 1.

Exercice 48. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes, intégrables et centrées. On suppose que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est équi-intégrable cf. (1).

Montrer que $(M_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 en probabilité puis dans L^1 .

Indic : $Y_n = X_n \mathbf{1}_{|X_n| > a}$.

5. Autour du TCL

Exercice 49. Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. (a) Quelle est la loi de S_n ?

(b) Montrer que $Z_n = (S_n - n)/\sqrt{n}$ converge en loi vers une gaussienne centrée réduite.

(c) Plus généralement, si S_λ suit la loi de Poisson de paramètre λ , montrer que $(S_\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ converge en loi, lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$ vers une gaussienne centrée réduite.

2. (a) Montrer que

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(Z_n > t) \leq t^{-2}.$$

(b) En déduire que $\mathbb{E}[Z_n^+]$ converge vers $\mathbb{E}[G^+]$ où G est gaussienne centrée réduite.

(c) Montrer que

$$\mathbb{E}[Z_n^+] = \frac{e^{-n} n^n \sqrt{n}}{n!}.$$

(d) Retrouver la formule de Stirling.

Exercice 50. On observe des particules dont la durée de vie X est une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.

1. Calculer la probabilité pour qu'une particule déterminée n'existe plus à l'instant $t > 0$.
2. n particules sont dans une enceinte close ; leurs durées de vie sont indépendantes et de même loi $\mathcal{E}(\theta)$. On désigne par N_t le nombre de particules qui ne sont pas désintégrées à l'instant t . Quelle est la loi de N_t ? Calculer la moyenne et la variance de N_t . Étudier $\mathbb{V}[N_t]$ en fonction de t .
3. Soit $0 < \alpha < 1$. Étudier $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_t > \alpha n)$. Si $t_0 = \ln(2)/\theta$, que vaut $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_{t_0} > n/2)$?

Exercice 51. Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite v.a.r. i.i.d. suivant la loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$. Peut-on appliquer le TCL ?

Trouver la loi de M_n . Pensez-vous que $(\sqrt{n}M_n)_{n \geq 1}$ converge en loi ?

Exercice 52. Soit (P) la propriété suivante :

Si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes et de même loi μ , $(X + Y)/\sqrt{2}$ est aussi de loi μ .

1. Montrer que la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ vérifie (P).
2. Soit μ une probabilité sur \mathbf{R} telle que $\int_{\mathbf{R}} x^2 \mu(dx) = 1$ vérifiant (P).
 - (a) Montrer que si X est de loi μ alors $\mathbb{E}[X] = 0$.
 - (b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$ et toute suite X_1, \dots, X_{2^n} i.i.d. de loi μ , la v.a.r.

$$Y_n = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{i=1}^{2^n} X_i$$

est de loi μ .

(c) Montrer que $\mu = \mathcal{N}(0, 1)$. Pensez au TCL !

Exercice 53 (Une autre démonstration du TCL). Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. telle que $X_1 \in L^3$; $\mathbb{E}[X_1] = 0$, $\mathbb{V}(X_1) = 1$. Considérons d'autre part $(G_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de v.a.r. i.i.d. suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendante de $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

On note $T_n = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n X_i$. Pour $k = 1, \dots, n - 1$, on note

$$U_k = \frac{1}{\sqrt{n}} (X_1 + \dots + X_k + G_{k+1} + \dots + G_n), \quad U_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n G_i, \quad U_n = T_n.$$

1. Quelle est la loi de U_0 ?
2. On pose, pour $k = 1, \dots, n$, $V_k = U_k - X_k/\sqrt{n}$. Montrer que $V_k = U_{k-1} - G_k/\sqrt{n}$.
3. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction \mathcal{C}^3 dont la dérivée troisième est bornée.
 - (a) En écrivant un développement de Taylor (pensez à V_k), montrer que

$$|\mathbb{E}[f(U_k)] - \mathbb{E}[f(U_{k-1})]| \leq \frac{c}{n^{\frac{3}{2}}}$$

où c est une constante que l'on déterminera.

(b) Soit G de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que

$$|\mathbb{E}[f(T_n)] - \mathbb{E}[f(G)]| \leq \frac{c}{\sqrt{n}}.$$

Commentaires ?

Exercice 54. Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. intégrables et $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue sur \mathbf{R} et dérivable au point $m = \mathbb{E}[X_1]$.

Déterminer la limite en loi de la suite $(\sqrt{n}[f(M_n) - f(m)])_{n \geq 1}$.

Indic : $f(x) = f(m) + (x - m)f'(m) + (x - m)g(x)$ avec g continue et $\lim_{x \rightarrow m} g(x) = 0$.

6. Vecteurs gaussiens

Exercice 55. Loi du χ^2 Pour $s > 0, t > 0$,

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx.$$

1. Montrer que, pour $s > 0, t > 0$, $\Gamma(s)\Gamma(t) = \Gamma(s+t)B(s, t)$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
2. Pour $\alpha > 0$ et $s > 0$, on note $\Gamma_{s,\alpha}$ la probabilité sur \mathbf{R} de densité

$$\gamma_{s,\alpha}(x) = \frac{\alpha^s}{\Gamma(s)} x^{s-1} e^{-\alpha x} \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(x).$$

(a) Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes; X de loi $\Gamma_{s,\alpha}$, Y de loi $\Gamma_{t,\alpha}$. Quelle est la loi de $X+Y$?

(b) Soit G_1, \dots, G_d indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la densité de G_1^2 puis celle de $G_1^2 + \dots + G_d^2$.

Exercice 56. 1. Soient $a > 0$ et X de loi $\mathcal{N}(0,1)$, $U = X\mathbf{1}_{|X|\leq a} - X\mathbf{1}_{|X|>a}$. Quelle est la loi de U ? Le couple (X, U) est-il gaussien?

2. Soit ε de loi $\mathbb{P}(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$ indépendante de X . Loi de $Y = \varepsilon X$? Le couple (X, Y) est-il gaussien?

Exercice 57. Soient X_1, \dots, X_n n v.a.r. gaussiennes indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $\bar{X}_n = n^{-1}(X_1 + \dots + X_n)$ et $W_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i - \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ sont indépendantes.

Exercice 58 (Apprendre le cours). Soit $X = (X_1, X_2, X_3)^*$ un vecteur gaussien de moyenne $(1, 0, 3)^*$ et de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{respectivement} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la fonction caractéristique de X ?
2. Quelles sont les lois marginales? Déterminer les lois de (X_1, X_2) , (X_1, X_3) et (X_2, X_3) .
3. Est-ce que deux composantes de X sont indépendantes?
4. X admet-il une densité? Si oui la calculer.

Les lois usuelles

Si X est une variable aléatoire réelle, sa fonction de répartition est la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

Si X est à valeurs dans \mathbf{R}^d , sa fonction caractéristique est donnée par

$$\forall t \in \mathbf{R}^d, \quad \varphi_X(t) = \mathbb{E} [e^{it \cdot X}].$$

Lois discrètes

Notation : pour p élément de $[0, 1]$, on note $q = 1 - p$.

Si X est à valeurs entières, sa fonction ou série génératrice est la série entière

$$\forall |z| \leq 1, \quad G_X(z) = \mathbb{E} [z^X].$$

On a alors

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \varphi_X(t) = G_X(e^{it}).$$

Loi de Bernoulli, $\mathcal{B}(p)$, $0 \leq p \leq 1$:

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = q;$$

Loi binomiale, $\mathcal{B}(n, p)$, $n \geq 1$, $0 \leq p \leq 1$:

$$\forall k = 0, \dots, n, \quad \mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Loi géométrique, $\mathcal{G}(p)$, $0 < p < 1$:

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}.$$

Loi binomiale négative, $\mathcal{B}_-(n, p)$, $n \geq 1$, $0 < p < 1$:

$$\forall k \geq n, \quad \mathbb{P}(X = k) = C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n}.$$

Loi de Poisson, $\mathcal{P}(c)$, $c > 0$:

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = e^{-c} \frac{c^k}{k!}.$$

Loi / v.a.	Notation	Espérance	Variance	G_X
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	p	pq	$q + pz$
Binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	np	npq	$(q + pz)^n$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$1/p$	q/p^2	$pz(1 - qz)^{-1}$
Binomiale négative	$\mathcal{B}_-(n, p)$	n/p	nq/p^2	$(pz(1 - qz)^{-1})^n$
Poisson	$\mathcal{P}(c)$	c	c	$e^{c(z-1)}$

Lois à densité

X à valeurs dans \mathbf{R}^d a pour densité p_X si

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d), \quad \mathbb{P}(X \in B) = \int_B p_X(x) dx.$$

Loi uniforme sur $[a, b]$, $\mathcal{U}(a, b)$, $a < b$:

$$p_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x), \quad F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ (b-a)^{-1}(t-a) & \text{si } a \leq t < b \\ 1 & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

Loi de Cauchy, $\mathcal{C}(c)$, $c > 0$:

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{c^2 + x^2}, \quad F_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{t}{c}\right).$$

Loi exponentielle, $\mathcal{E}(c)$, $c > 0$:

$$p_X(x) = ce^{-cx} \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x), \quad F_X(t) = (1 - e^{-ct}) \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(t).$$

Loi de Laplace, $\mathcal{L}(c)$, $c > 0$:

$$p_X(x) = \frac{c}{2} e^{-c|x|}, \quad F_X(t) = \begin{cases} e^{ct}/2 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-ct}/2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Loi gaussienne ou normale réelle, $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Loi gaussienne dans \mathbf{R}^d , $\mathcal{N}(m, \Gamma)$: $m \in \mathbf{R}^d$, Γ matrice réelle $d \times d$ symétrique et semi-définie positive. Densité si et seulement si $\det \Gamma > 0$ et dans ce cas

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det \Gamma}} \exp\left(-\frac{(x-m) \cdot \Gamma^{-1}(x-m)}{2}\right).$$

Loi gamma, $\Gamma(s, c)$, $s > 0$, $c > 0$:

$$p_X(x) = \frac{c}{\Gamma(s)} (cx)^{s-1} e^{-cx} \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(x), \quad \text{avec } \Gamma(s) = \int_{\mathbf{R}_+^*} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Loi / v.a.	Notation	Espérance	Variance	φ_X
Uniforme	$\mathcal{U}(a, b)$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{itb} - e^{ita}) (it(b-a))^{-1}$
Cauchy	$\mathcal{C}(c)$	non	non	$e^{-c t }$
Exponentielle	$\mathcal{E}(c)$	c^{-1}	c^{-2}	$c(c-it)^{-1}$
Laplace	$\mathcal{L}(c)$	0	$2c^{-2}$	$c^2 (c^2 + t^2)^{-1}$
Gaussienne	$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	m	σ^2	$\exp(itm - \sigma^2 t^2/2)$
Gaussienne	$\mathcal{N}(m, \Gamma)$	m	Γ	$\exp(it \cdot m - \frac{1}{2} t \cdot \Gamma t)$
Gamma	$\Gamma(s, c)$	sc^{-1}	sc^{-2}	$(c(c-it)^{-1})^s$