La Loi des Grands Nombres.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et $M_n = S_n/n$.

L'objectif de ce texte est d'étudier la convergence presque sûre de la suite $(S_n/n)_{n\geq 1}$. Le résultat que nous présentons est dû à Andrey Nikolaevich Kolmogorov dans les années 1929/1930.

Avant de poursuivre, rappelons que $\limsup S_n/n$, $\liminf S_n/n$ sont deux variables aléatoires asymptotiques de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$; d'après la loi du 0-1 de Kolmogorov elles sont presque sûrement constantes dans $\overline{\mathbb{R}}$. L'événement $\{(M_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}\}$ est un événement asymptotique de cette même suite. Il a donc pour probabilité 0 ou 1.

Théorème. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées.*

a. Si X_1 est intégrable, $(S_n/n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[X_1]$.

b. Lorsque X_1 n'est pas intégrable, au moins un des deux événements $\{\limsup S_n/n = +\infty\}$ et $\{\liminf S_n/n = -\infty\}$ a pour probabilité 1.

Remarque. En particulier, $(M_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement dans $\mathbb{R}$ si et seulement si X_1 est intégrable ; dans ce cas, la limite est $\mathbb{E}[X_1]$.

Avant d'établir le résultat, rappelons que, pour tout $p \geq 1$,

$$\sum_{k\geq p+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k\geq p} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k\geq p} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} = \int_p^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{p}. \tag{1}$$

D'autre part, si la suite réelle $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^n x_k = x$. En effet, la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est bornée et pour tout $n \geq r \geq 1$,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - x \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^r |x_k - x| + \frac{1}{n} \sum_{k=r+1}^n |x_k - x| \leq \frac{2r}{n} \sup_{k\geq 1} |x_k| + \left(1 - \frac{r}{n}\right) \sup_{k>r} |x_k - x| \ ;$$

par conséquent,

$$\limsup_{n\to+\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - x \right| \leq 0 + \sup_{k>r} |x_k - x|$$

ce qui donne le résultat puisque $\lim_{r\to+\infty} \sup_{k>r} |x_k - x| = 0$.

Démonstration. Commençons par établir le point a. Supposons que X_1 est intégrable. La démonstration se fait en deux étapes.

- On suppose que les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ sont positives.

X_1 étant intégrable, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n \geq n) < +\infty$ et donc, d'après le lemme de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(\limsup\{X_n \geq n\}) = 0$ et

$$\frac{1}{n} \sum_{k\leq n} X_k - \frac{1}{n} \sum_{k\leq n} X_k \mathbf{1}_{X_k<k}$$

converge presque sûrement vers 0. En effet, si $\omega \in (\limsup\{X_n \geq n\})^c = \liminf\{X_n < n\}$, il existe r_ω tel que pour tout $k > r_\omega$, $X_k(\omega) < k$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum\nolimits_{k\leq n} X_k(\omega) - \frac{1}{n}\sum\nolimits_{k\leq n} X_k(\omega)\mathbf{1}_{X_k(\omega)<k}(\omega)\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\nolimits_{k\leq r_\omega} X_k(\omega) = 0.$$

Il suffit de monter que, presque sûrement,

$$\frac{1}{n}\sum_{k\leq n} X_k\,\mathbf{1}_{X_k<k} \longrightarrow \mathbb{E}[X_1].$$

Soit $\alpha > 1$. On regarde la « sous-suite » associée à $[\alpha^n]$: $[\alpha^{n+1}]/[\alpha^n] \longrightarrow \alpha > 1$ donc $n \longmapsto [\alpha^n]$ est strictement croissante à partir d'un certain rang. Posons, pour tout entier $n \geq 1$,

$$U_n = \frac{1}{[\alpha^n]}\sum_{k\leq[\alpha^n]} X_k\,\mathbf{1}_{X_k<k}.$$

On a, par indépendance, comme $[\alpha^n] \geq \alpha^n/2$,

$$\mathbb{V}(U_n) = \frac{1}{[\alpha^n]^2}\sum_{k\leq[\alpha^n]}\mathbb{V}(X_k\,\mathbf{1}_{X_k<k}) \leq \frac{4}{\alpha^{2n}}\sum_{k\leq\alpha^n}\mathbb{E}\left[X_1^2\,\mathbf{1}_{X_1<k}\right],$$

et, permuttant les deux sommes puisque tous les termes sont positifs,

$$\sum_{n\geq1}\mathbb{V}(U_n) \leq \sum_{n\geq1}\frac{4}{\alpha^{2n}}\sum_{k\leq\alpha^n}\mathbb{E}\left[X_1^2\,\mathbf{1}_{X_1<k}\right] = 4\sum_{k\geq1}\mathbb{E}\left[X_1^2\,\mathbf{1}_{X_1<k}\right]\sum_{n:\alpha^n\geq k}\frac{1}{\alpha^{2n}}.$$

Or, pour tout $k \geq 1$, notant n_0 le plus petit entier r vérifiant $\alpha^r \geq k$, puisque $0 < \alpha^{-2} < 1$,

$$\sum_{n:\alpha^n\geq k}\frac{1}{\alpha^{2n}} = \sum_{n\geq n_0}\frac{1}{\alpha^{2n}} = \frac{1}{\alpha^{2n_0}}\,\frac{1}{1-\alpha^{-2}} \leq \frac{1}{k^2}\,\frac{1}{1-\alpha^{-2}}.$$

On en déduit, par convergence monotone, que

$$\sum_{n\geq1}\mathbb{V}(U_n) \leq \frac{4}{1-\alpha^{-2}}\sum_{k\geq1}\mathbb{E}\left[X_1^2\,\mathbf{1}_{X_1<k}\right]\frac{1}{k^2} = \frac{4}{1-\alpha^{-2}}\,\mathbb{E}\left[X_1^2\sum\nolimits_{k\geq1}\frac{1}{k^2}\mathbf{1}_{X_1<k}\right].$$

Or, il résulte de la majoration (1), que, pour tout $x \geq 0$,

$$\sum_{k\geq1}\frac{1}{k^2}\,\mathbf{1}_{x<k} = \sum_{k\geq[x]+1}\frac{1}{k^2} = \frac{x^2}{(1+[x])^2} + \sum_{k\geq[x]+2}\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(1+[x])^2} + \frac{1}{1+[x]} \leq \frac{2}{1+[x]}.$$

Finalement,

$$\sum_{n\geq1}\mathbb{V}(U_n) \leq \frac{8}{1-\alpha^{-2}}\,\mathbb{E}\left[\frac{X_1^2}{1+[X_1]}\right] \leq \frac{8}{1-\alpha^{-2}}\,\mathbb{E}\left[X_1\right] < +\infty.$$

Par conséquent, via l'inégalité de Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n\geq1}\mathbb{P}\left(|U_n - \mathbb{E}[U_n]| > \varepsilon\right) \leq \sum_{n\geq1}\mathbb{V}(U_n)\varepsilon^{-2} < +\infty.$$

La suite $(U_n - \mathbb{E}[U_n])_{n\geq1}$ converge vers 0 presque sûrement.
D'autre part, X_1 étant intégrable, $\lim\limits_{k\to+\infty}\mathbb{E}[X_1\,\mathbf{1}_{X_1<k}] = \mathbb{E}[X_1]$ et le lemme Césaro implique que

$$\frac{1}{n}\sum_{k\leq n}\mathbb{E}\left[X_1\,\mathbf{1}_{X_1<k}\right]\longrightarrow\mathbb{E}[X_1].$$

En particulier, $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}[U_n]=\mathbb{E}[X_1]$ et $(U_n)_{n\geq1}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[X_1]$.

Rappelons que $\liminf M_n$ et $\limsup M_n$ sont des variables aléatoires asymptotiques de la suite $(X_n)_{n\geq1}$ donc presque sûrement constantes dans $\overline{\mathbb{R}}$ disons respectivement égales à c_* et c^*.

Notons, pour tout $n\geq1$, $k_n=\sup\{k\in\mathbb{N}:[\alpha^k]\leq n\}$: $[\alpha^{k_n}]\leq n<[\alpha^{k_n+1}]$. Nous avons comme les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq1}$ sont positives

$$[\alpha^{k_n}]\leq n\leq[\alpha^{k_n+1}],\qquad S_{[\alpha^{k_n}]}\leq S_n\leq S_{[\alpha^{k_n+1}]},$$

et donc

$$\frac{[\alpha^{k_n}]}{[\alpha^{k_n+1}]}\,U_{k_n}\leq M_n\leq U_{k_n+1}\,\frac{[\alpha^{k_n+1}]}{[\alpha^{k_n}]}.$$

Par suite, lorsque $n\to+\infty$, comme $k_n\to+\infty$, $\frac{[\alpha^{k_n+1}]}{[\alpha^{k_n}]}\longrightarrow\alpha$ et $(U_{k_n})_{n\geq1}$ converge vers 1 presque sûrement. Par conséquent,

$$\frac{1}{\alpha}\,\mathbb{E}[X_1]\leq\liminf M_n\leq\limsup M_n\leq\alpha\,\mathbb{E}[X_1],\quad \mathbb{P}-p.s.$$

Donc $\mathbb{E}[X_1]/\alpha\leq c_*\leq c^*\leq\alpha\mathbb{E}[X_1]$. Cette inégalité étant valable pour tout $\alpha>1$, on a finalement $c_*=c^*=\mathbb{E}[X_1]$ ce qui signifie que $(S_n/n)_{n\geq1}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[X_1]$.

• Montrons que le résultat est encore vrai dans le cas général. Les variables aléatoires $(X_n^+)_{n\geq1}$ sont indépendantes comme le sont aussi les variables aléatoires $(X_n^-)_{n\geq1}$; X_1^+ et X_1^- sont intégrables puisque X_1 l'est. D'après la première étape,

$$M_n=\frac{1}{n}\sum_{k\leq n}X_k^+-\frac{1}{n}\sum_{k\leq n}X_k^-$$

converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[X_1^+]-\mathbb{E}[X_1^-]=\mathbb{E}[X_1]$.

Passons à présent à la seconde assertion de l'énoncé. Supposons que X_1 n'est pas intégrable. Soit $c>0$. X_1/c n'est pas intégrable donc $\sum_{n\geq1}\mathbb{P}(|X_n|\geq cn)=\sum_{n\geq1}\mathbb{P}(|X_1|\geq cn)=+\infty$. D'après le lemme de Borel-Cantelli $\mathbb{P}(\limsup\{|X_n|/n\geq c\})=1$; presque sûrement, $\limsup|X_n|/n\geq c$. Il s'en suit que, presque sûrement, $\limsup|X_n|/n=+\infty$. Or, pour tout $n\geq2$,

$$\frac{X_n}{n}=M_n-\frac{n-1}{n}M_{n-1},\qquad\frac{|X_n|}{n}\leq|M_n|+|M_{n-1}|$$

et par suite, presque sûrement,

$$+\infty=\limsup|X_n|/n\leq2\,\limsup|M_n|.$$

Or $\{\limsup|M_n|=+\infty\}\subset\{\limsup M_n=+\infty\}\cup\{\liminf M_n=-\infty\}$. Ces deux événements ne peuvent pas être tous deux négligeables puisque leur union a pour probabilité 1. Comme il s'agit de deux événements asymptotiques, au moins un des deux a pour probabilité 1. □

Corollaire. *Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées.*

Si X_1 possède un moment d'ordre $p\geq1$, $(S_n/n)_{n\geq1}$ converge dans L^p vers $\mathbb{E}[X_1]$.

Démonstration. D'après le résultat précédent, $(M_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[X_1]$ notée m dans la suite. De plus, pour tous $r \geq 1$, $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[|M_n - m|^p\right] = \mathbb{E}\left[\min\left(|M_n - m|^p, r\right)\right] + \mathbb{E}\left[\left(|M_n - m|^p - r\right)^+\right] \ ;$$

et par croissance et convexité de la fonction $x \longmapsto (x^p - r)^+$ on obtient

$$\left(|M_n - m|^p - r\right)^+ \leq \left(\left[n^{-1}\textstyle\sum_{k\leq n}|X_k - m|\right]^p - r\right)^+ \leq \frac{1}{n}\sum_{k\leq n}\left(|X_k - m|^p - r\right)^+$$

d'où il résulte que

$$\mathbb{E}\left[|M_n - m|^p\right] \leq \mathbb{E}\left[\min\left(|M_n - m|^p, r\right)\right] + \mathbb{E}\left[\left(|X_1 - m|^p - r\right)^+\right].$$

Par convergence dominée, pour tout $r \geq 1$, $\mathbb{E}\left[\min\left(|M_n - m|^p, r\right)\right] \longrightarrow 0$ si $n \to +\infty$ et donc

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[|M_n - m|^p\right] \leq 0 + \mathbb{E}\left[\left(|X_1 - m|^p - r\right)^+\right] \ ;$$

pour conclure, notons que par convergence dominée, $\lim_{r\to+\infty} \mathbb{E}\left[\left(|X_1 - m|^p - r\right)^+\right] = 0$. □

Remarque. Si les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont positives, indépendantes et identiquement distribuées avec $\mathbb{E}[X_1] = +\infty$, alors $(M_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers $+\infty$, puisque, pour tout entier $r \geq 1$, presque sûrement,

$$\liminf M_n \geq \liminf \frac{1}{n}\sum_{k\leq n}\min(X_k, r) = \mathbb{E}[\min(X_1, r)],$$

et, par convergence monotone, $\mathbb{E}[\min(X_1, r)]$ croît vers $\mathbb{E}[X_1] = +\infty$ si $r \to +\infty$.