UFR Mathématiques
Université Rennes I

Maîtrise/MIM
Année 2003/2004

Module PRB1 : Probabilités de base.

Partiel 1^{re} session : durée deux heures.

Documents non autorisés.

Samedi 15 novembre 2003.

Exercice 1. 1. Soit X une variable aléatoire positive. Établir que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\, dt.$$

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires positives indépendantes et de même loi et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On note F la fonction de répartition de X_1 et G la fonction génératrice de N :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t), \qquad \forall |s| \leq 1, \quad G(s) = \mathbb{E}\left[s^N\right] = \sum\nolimits_{k\geq 1} s^k\, \mathbb{P}(N = k).$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire $Z_k = \max(X_1, \ldots, X_k)$.

(a) Exprimer la fonction de répartition H_k de Z_k en fonction de F.

(b) Déterminer $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}[Z_k]$ lorsque X_1 est de loi uniforme sur $[0, 1]$.

(c) Comparer la variable aléatoire Z_k aux variables aléatoires X_1 et $X_1 + \ldots + X_k$. En déduire que Z_k est intégrable si et seulement si X_1 l'est.

(d) On suppose que $\mathbb{E}[X_1] < +\infty$ et on note

$$\tau = \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) = 1\}, \quad \inf \emptyset = +\infty.$$

Remarquer que $\tau \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et montrer que $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}[Z_k] = \tau$.

3. On considère la variable aléatoire définie par

$$Z(\omega) = \max\left(X_1(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega)\right), \quad \omega \in \Omega.$$

(a) Soit H la fonction de répartition de Z. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad H(t) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(N = k)\, H_k(t).$$

En déduire une expression de H en fonction de F et G.

(b) Expliciter H lorsque X_1 est de loi uniforme sur $[0, 1]$ et N de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

(c) Montrer que dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ on a

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(N = k)\, \mathbb{E}[Z_k].$$

En déduire que si X_1 et N sont intégrables Z l'est aussi.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes.

1. Montrer que l'événement

$$A = \left\{\omega \in \Omega, \quad \sum\nolimits_{n\geq 1} X_n(\omega) \text{ converge}\right\}$$

est un événement asymptotique de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. On suppose que les variables X_n sont identiquement distribuées et que $\mathbb{P}(X_1 = 0) < 1$.
   (a) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X_1| \geq c) > 0$ et en déduire $\mathbb{P}\big(\limsup\{|X_n| \geq c\}\big)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$.
3. On suppose à présent que, pour tout $n \geq 1$, X_n est de loi $\mathcal{N}\left(0, n^{-4}\right)$.
   (a) En utilisant l'inégalité de Tchebycheff, établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}\left(|X_n| \geq \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right) \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

   (b) Montrer que $\liminf\left\{|X_n| < n^{-\frac{5}{4}}\right\} \subset A$ et en déduire que $\mathbb{P}(A) = 1$.
   (c) On note, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad S = \mathbf{1}_A \sum_{k\geq 1} X_k.$$

Déterminer la loi de S_n. Montrer que la fonction caractéristique de S_n converge simplement vers celle de S. En déduire la loi de S. On notera $\sigma^2 = \sum_{k\geq 1} k^{-4}$.

   (d) La variable S est-elle asymptotique de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi μ. On note F la fonction de répartition de X et on suppose que F est continue sauf aux points $d_1 < d_2 < \ldots < d_r$. On rappelle que $F(t-)$ désigne la limite à gauche de F au point t.

Montrer que

$$\mathbb{P}\big(X - Y = 0\big) = \int_{\mathbb{R}} \mu\left(\{x\}\right)\, \mu(dx) = \sum_{n=1}^{r} \big(F(d_n) - F(d_n-)\big)^2.$$