# Quelques exercices de probabilité

## 1. Espace probabilisé.

**Exercice 1.** Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application où $X$ et $Y$ sont deux ensembles non vides.

1. Soient $A \subset X$ et $B \subset Y$ ; rappeler la définition de $f(A)$ et de $f^{-1}(B)$.

2. (a) Montrer que pour toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de $Y$,

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

(b) Établir que pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de $X$,

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i), \qquad f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

**Exercice 2.** Soient $X$ un ensemble non vide et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $X$. On définit

$$\limsup_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k, \quad \text{et}, \quad \liminf_n A_n = \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

1. Montrer que $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$.

2. Déterminer $\limsup_n A_n$ et $\liminf_n A_n$ dans les exemples suivants :
   – la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
   – la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
   – $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{2n} = A$ et $A_{2n+1} = B$ où $A \subset X$, $B \subset X$ ;
   – $X = \mathbb{R}$ et pour tout $n$, $A_n = \left[2 + (-1)^{n+1}, 3 + \frac{1}{n+1}\right]$.

**Exercice 3.** 1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, calculer $S(x) = \sum_{i\geq 0} x^i$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $|x| < 1$, montrer que

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{i\geq 0} \mathrm{C}_{n+i}^{n}\, x^i.$$

**Exercice 4.** Une main au bridge c'est la donnée de 13 cartes prises dans un jeu de 52. Trouver le nombre de mains possibles. Quelle est la probabilité qu'une main possède exactement 3 trèfles ? exactement un roi et une dame ? au moins un as ?

**Exercice 5.** 20 chevaux sont au départ d'une course. Trouver le nombre de tiercés, de quartés, de quintés dans l'ordre et dans le désordre.

**Exercice 6.** Soit $\Omega$ un ensemble à $np$ éléments. Trouver le nombre de partitions de $\Omega$ en $n$ parties de $p$ éléments.

**Exercice 7.** Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants suivant le cours de PRBU possèdent le même anniversaire ?

**Exercice 8.** Une ville compte 3 médecins; 4 personnes sont malades. Quelle est la probabilité pour que tous les malades appellent le même médecin ? Quelle est la probabilité pour que tous les médecins soient appelés ?

**Exercice 9.** Soient $(\mathbb{P}_k)_{k\geq 0}$ une suite de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(p_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels de $[0,1]$. Montrer que l'application $\mathbb{P}$, définie par

$$\forall A \in \mathcal{F}, \qquad \mathbb{P}(A) = \sum_{k\geq 0} p_k\, \mathbb{P}_k(A),$$

est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ dès que $\sum_{k\geq 0} p_k = 1$.

**Exercice 10.** Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(A) = 0, \text{ ou } \mathbb{P}(A) = 1\}$. Montrer que $\mathcal{G}$ est une tribu sur $\Omega$.

**Exercice 11.** Soient $\mathbb{P}$ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ une suite de parties de $\mathcal{F}$. On note $A$ l'ensemble $\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\geq n} A_k$. Montrer que $\mathbb{P}(A) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k)$. Que vaut $\mathbb{P}(A)$ si $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ ?

**Exercice 12.** Trois machines $A$, $B$, $C$ produisent 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées par une usine. Le pourcentage de pièces défectueuses pour chaque machine est respectivement 3%, 4% et 5%.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse ?

2. Si on prend une pièce qui s'avère être défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par $A$, $B$, $C$ ?

**Exercice 13.** Une particule $\pi$ peut occuper deux positions $A$ et $B$. Au temps $n = 0$, $\pi$ se trouve en $A$. Pour tout entier $n$, on note $A_n$ (respectivement $B_n$) l'événement « $\pi$ est en $A$ (respectivement en $B$) au temps $n$ » et $\alpha_n = \mathbb{P}(A_n)$, $\beta_n = \mathbb{P}(B_n)$. On suppose qu'il existe un réel $\theta \in ]0,1[$ tel que $\mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) = \theta\alpha_n$, $\mathbb{P}(B_n \cap B_{n+1}) = \theta\beta_n$.

1. Calculer, en fonction de $\theta$ et $\beta_n$, $\mathbb{P}(B_n \cap A_{n+1})$.

2. Déterminer une relation de récurrence entre $\alpha_n$ et $\alpha_{n+1}$ puis calculer la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$.

**Exercice 14.** La police recherche un alcoolique qui est, avec probabilité $p$, occupé à étancher sa soif dans l'un des huit bistrots du quartier. Sachant qu'il n'a pas de préférence pour un bistrot et que les policiers l'ont cherché en vain dans les sept premiers bistrots, quelle est la probabilité qu'il le déniche dans le huitième ?

**Exercice 15.** On considère $n$ menteurs indépendants $I_1, \ldots, I_n$. Le premier menteur reçoit une information sous la forme oui ou non. Chacun d'eux transmet le message qu'il a reçu à son successeur avec probabilité $p$. Le dernier écrit au tableau le message qu'il a reçu avec probabilité $p$. Calculer la probabilité $p_n$ de l'événement « l'information est fidèlement transmise ».

## 2. Variable aléatoire réelle.

**Exercice 16.** Soit $X$ une v.a.r. de fonction de répartition $F$ avec $F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = x/4$ si $0 \leq x < 1$, $F(x) = x/2$ si $1 \leq x < 2$ et $F(x) = 1$ si $x \geq 2$.

Tracez le graphe de $F$ puis calculer $\mathbb{P}(X = 1/2)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X \in ]1/2, 3/2])$.

**Exercice 17.** À quelle condition sur le réel $\lambda$, la fonction $p(x) = \lambda|x|\exp(-|x|)$ est-elle une densité de probabilité ? Dans ce cas, déterminer la fonction de répartition associée ?

**Exercice 18.** 1. Soit $X$ une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer les lois de $Y = u(X)$ et $Z = v(X)$ si $u(x) = 1 - x$ et $v(x) = \min(x, 1-x)$.

2. Déterminer la fonction de répartition de $T = \max(S, 0)$ où $S$ suit la loi de Cauchy. La v.a. $T$ possède-t-elle une densité ?

**Exercice 19.** Soit $X$ une v.a. uniforme sur $[0,1]$ et $p \in ]0,1[$. Quelle est la loi de $Y = \mathbf{1}_{X \leq p}$ ? Construire à l'aide de $X$ une variable aléatoire $Z$ prenant les valeurs $a$, $b$ et $c$ avec probabilité $p$, $q$ et $r$ si $p$, $q$, $r$ sont trois réels de $[0,1]$ tels que $p + q + r = 1$.

**Exercice 20.** Soit $X$ une v.a. suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est la loi de la v.a. $Y = 1 + [X]$ ? ($[x]$ désigne la partie entière de $x$).

**Solution.** $X$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc $Y = 1 + [X]$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}\big(1 + [X] = k\big) = \mathbb{P}\big([X] = k - 1\big) = \mathbb{P}\big(X \in [k-1, k[\big),$$

et comme $F_X$ est continue, on a

$$\mathbb{P}(Y = k) = F_X(k) - F_X(k-1) = \exp(-\lambda(k-1)) - \exp(-\lambda k) = \big(1 - \exp(-\lambda)\big)\exp(-\lambda(k-1)).$$

$Y$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - \exp(-\lambda)$, puisque $\exp(-\lambda(k-1)) = \exp(-\lambda)^{k-1}$.

**Exercice 21.** Quelle est la loi de la v.a. $Y = 2 + [X]$ si $X$ a pour fonction de répartition $F$ définie par $F(x) = q^x(x(q-1) - 1) + 1$ si $x > 0$, $F(x) = 0$ sinon, $0 < q < 1$.

**Exercice 22.** Soit $X$ une v.a. suivant une loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$ i.e. pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. On définit une v.a. $Y$ en posant $Y = X/2$ si $X$ est pair et $Y = (X+1)/2$ si $X$ est impair. Déterminer la loi de $Y$.

**Exercice 23.** Soient $a$ et $b$ deux réels. Déterminer la loi de la v.a. $Y = aX + b$ quand $X$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$ puis quand $X$ est gaussienne centrée réduite.

**Exercice 24.** Soit $X$ une v.a. uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la loi de la v.a. $Y = \exp(\lambda X)$ si $\lambda > 0$ ? $Y$ possède-t-elle une densité ?

**Exercice 25.** À quelle condition sur $\alpha$, la fonction $p$ définie par $p(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ si $0 < x < 1$, $p(x) = 0$ sinon est-elle une densité de probabilité ? Montrer que la loi de $Y = -\alpha\ln(X)$ ne dépend pas de $\alpha$. Calculer $\mathbb{E}[Y]$.

**Exercice 26.** Soient $X$ une v.a. uniforme sur $[0,1]$ et $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la v.a. $Y = -\ln(X)/\lambda$ en calculant sa fonction de répartition puis en donnant une densité ?

**Solution.** Remarquons tout d'abord que $Y$ est bien définie puisque $\mathbb{P}(X \leq 0) = 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$. La fonction exponentielle étant strictement croissante, on a, comme $\lambda > 0$ et $F_X$ est continue,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\big(\ln(X) \geq -\lambda y\big) = \mathbb{P}\big(X \geq \exp(-\lambda y)\big) = 1 - F_X\big(\exp(-\lambda y)\big).$$

Or $F_X(x) = \min(x^+, 1)$ avec $x^+ = \max(x, 0)$ et donc $F_Y(y) = 1 - \exp(-\lambda y)$ si $y \geq 0$ et $F_Y(y) = 0$ sinon.

Soit maintenant $f$ borélienne bornée. Calculons $\mathbb{E}[f(Y)]$. On a

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \mathbb{E}\left[f(-\ln(X)/\lambda)\right] = \int_0^1 f(-\ln x/\lambda)\,dx\ ;$$

posons $y = -\ln x/\lambda$ soit $x = \exp(-\lambda y)$ pour obtenir

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \int_0^\infty f(y)\,\lambda\exp(-\lambda y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\lambda\exp(-\lambda y)\mathbf{1}_{y>0}\,dy.$$

La densité de $Y$ est donc $p_Y(y) = \lambda\exp(-\lambda y)\mathbf{1}_{y>0}$.

Les deux résultats sont cohérents : on trouve que $F_Y'(y) = p_Y(y)$ si $y \neq 0$ ; $Y$ suit la loi $\mathcal{E}xp(\lambda)$.

**Exercice 27.** Soient $X$ une v.a. et $F_X$ sa fonction de répartition. Trouver la fonction de répartition de $Y = X^2$. Que se passe-t-il si $F_X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ ? Examiner le cas particulier $X$ de loi $\mathcal{N}(0,1)$ ?

**Exercice 28.** Calculer la moyenne et la variance des lois usuelles vues en cours.

**Exercice 29.** Déterminer $\lambda$ tel que la fonction $p$ définie par $p(x) = \lambda/(1-x)^2$ pour $x \in [2,4[$ et $p(x) = 0$ sinon soit une densité de probabilité. Si $X$ est une v.a. de densité $p$, déterminer sa fonction de répartition et calculer $\mathbb{E}[X]$.

**Exercice 30.** Soit $X$ une v.a. de densité $p(x) = x\exp(-x^2/2)\mathbf{1}_{x\geq 0}$. Vérifier que $p$ est une densité de probabilité puis calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}[X]$.

**Exercice 31.** Soit $X$ une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On définit $Y = \exp(X)$. Déterminer la densité de $Y$, $\mathbb{E}[Y]$ ainsi que $\mathbb{V}[Y]$.

**Exercice 32.** Soit $X$ une v.a. de densité $p(x) = \lambda\exp(-|x|)$.

1. (a) Calculer $\lambda$ ; déterminer la fonction de répartition de $X$ et la loi de $|X|$.

(b) Montrer que $X$ possède des moments de tous les ordres et calculer $\mathbb{E}[X^n]$ pour tout entier $n$. En déduire la moyenne et la variance de $X$.

2. Soit $Y$ une v.a. indépendante de $X$ et de même loi. Calculer la moyenne et la variance des v.a. $S = 2X - Y$, $T = X^2$.

**Exercice 33.** Soit $X$ de loi exponentielle $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $Y = \sqrt{|X|}$ ? Montrer que $Y$ est de carré intégrable et calculer $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{V}[Y]$.

**Exercice 34.** Soient $X$ et $\varepsilon$ deux v.a. indépendantes ; $X$ de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$ et $\varepsilon$ de loi donnée par $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$. On pose $Y = \varepsilon X$. Quelle est la loi de $Y$ ? Calculer $\mathbb{E}[XY]$. Les v.a. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 35.** Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ $n$ v.a. indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(p)$. Quelle est la loi de $S = X_1 + \ldots + X_n$ ? En déduire la moyenne et la variance de $S$.

**Exercice 36.** Soient $X$ et $Y$ deux v.a. indépendantes. Calculer la loi de la v.a. $X+Y$ dans les cas suivants :

1. $X$ de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, $Y$ de loi $\mathcal{P}(\mu)$ ;
2. $X$ de loi $\mathcal{B}(n,p)$, $Y$ de loi $\mathcal{B}(m,p)$ ;

3. $X$ de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $Y$ de loi $\mathcal{N}(\mu', \sigma'^2)$.

**Exercice 37.** Une puce se déplace dans le plan par saut de longueur $\delta > 0$. La puce part du point $O$, origine des coordonnées du plan, et saute $n$ fois dans une direction qui, pour chaque saut, est aléatoire. L'abscisse et l'ordonnée de la puce, après $n$ sauts, sont

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \delta \cos(\theta_i), \qquad Y_n = \sum_{i=1}^{n} \delta \sin(\theta_i);$$

et on suppose les v.a. $(\theta_i)_{1 \geq i \geq n}$ indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 2\pi]$.

Calculer l'espérance et la variance de de $X_n$ et $Y_n$, puis $\mathbb{E}\left[X_n^2 + Y_n^2\right]$. Calculer $\mathbb{E}[X_n Y_n]$ ; les v.a. $X_n$ et $Y_n$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 38.** Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$ où $0 < p < 1$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$S(\omega) = \inf\{i \geq 1,\ X_i(\omega) = 1\}, \qquad T(\omega) = \inf\{i \geq 1,\ X_i(\omega) = 0\},$$

avec la convention $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(T = \infty) = \mathbb{P}(S = \infty) = 0$ et déterminer la loi de $S$ et $T$.
2. On définit, pour $\omega \in \Omega$, $\tau(\omega) = \inf\{i \geq 2,\ X_{i-1}(\omega) = 0,\ X_i(\omega) = 1\}$ avec la même convention.
   (a) Montrer que $\tau \geq T + 1$ ;
   (b) Établir que $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 0$ ;
   (c) Montrer que $\tau(\omega) = \inf\{i > T(\omega),\ X_i(\omega) = 1\}$.
3. (a) Montrer que, si $k \geq 2$, $\{\tau = k\} = \bigcup_{i=1}^{k-1} \{\tau = k\} \cap \{T = i\}$.
   (b) Montrer que si $m \geq 1$, $l \geq 1$, $\mathbb{P}(\tau = m + l / T = l) = \mathbb{P}(S = m)$.
   (c) En déduire que, pour $k \geq 2$, notant $q = 1 - p$,

$$\mathbb{P}(\tau = k) = \frac{pq}{q - p}\left(q^{k-1} - p^{k-1}\right).$$

Déterminer la fonction caractéristique de $\tau$, sa moyenne, sa variance.

**Exercice 39 (2002, ex).** Soit $X$ une variable aléatoire de fonction de répartition $F$ donnée par

$$F(x) = 0, \quad \text{si } x < 0, \qquad F(x) = \frac{[x]}{1 + [x]}, \quad \text{si } x \geq 0,$$

où $[x]$ désigne la partie entière de $x$.

Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X \in ]1, 2])$, $\mathbb{P}(X \in [1, 4])$.

Calculer, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n)$ ?

**Solution.** On a,

$$\mathbb{P}(X = 1) = F(1) - F(1^-), \quad \mathbb{P}(X \in ]1, 2]) = F(2) - F(1), \quad \mathbb{P}(X \in [1, 4]) = F(4) - F(1^-),$$

ce qui donne, comme $F(1^-) = 0$,

$$\mathbb{P}(X = 1) = 1/2, \quad \mathbb{P}(X \in ]1, 2]) = 2/3 - 1/2 = 1/6, \quad \mathbb{P}(X \in [1, 4]) = 4/5.$$

D'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X = n) = F(n) - F(n^-) = F(n) - F(n-1) = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

**Exercice 40 (2001, ex).** Soit $X$ une variable aléatoire de densité $\exp(-|x|)/2$.

1. Pour $|s| < 1$, calculer $\Lambda(s) = \mathbb{E}[\exp(sX)]$. Comparer $\Lambda''(0)$ et $\mathbb{E}[X^2]$.

2. Déterminer la loi des variables aléatoires $U = \exp(-|X|)$ et $Y = \dfrac{1-U}{U}$.

**Solution.** 1. On a pour tout $|s| < 1$,

$$\Lambda(s) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{sx}e^{-|x|} = \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} e^{(s-1)x}\,dx + \int_{-\infty}^0 e^{(s+1)x}\,dx\right),$$

et donc, comme $|s| < 1$,

$$2\,\Lambda(s) = \left[\frac{1}{s-1}e^{(s-1)x}\right]_0^{+\infty} + \left[\frac{1}{s+1}e^{(s+1)x}\right]_{-\infty}^0 = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} = \frac{-2}{s^2-1}.$$

On a donc,

$$\forall |s| < 1, \qquad \Lambda(s) = \frac{1}{1-s^2}.$$

**Exercice 41 (2001, ex).** Soit $X$ une variable aléatoire de densité $(1+x)^{-2}\,\mathbf{1}_{x\geq 0}$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(k-1 \leq X < k)$. En déduire la loi de la variable aléatoire $S = 1 + [X]$ où $[x]$ désigne la partie entière de $x$.

2. (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{E}\big[S\mathbf{1}_{S\leq p}\big]$. $S$ est-elle intégrable ?

   (b) Calculer, pour $|z| < 1$, $\mathbb{E}\left[(S+1)z^S\right]$.

## 3. Couple aléatoire.

**Exercice 42.** Soient $X$ et $Y$ deux v.a. finies. La loi du couple $Z = (X, Y)$ est donnée par le tableau suivant :

| $X/Y$ | 0 | 1 | 2 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2/9 | 1/9 | 1/9 |
| 2 | 1/27 | 1/9 | 1/27 | 1/9 |
| 3 | 0 | 0 | 1/9 | 4/27 |

Trouver les lois marginales ; $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ? Pouvait-on le deviner en regardant le tableau ? Quelle est la probabilité pour que $XY$ soit impair ?

**Exercice 43.** 1. Soient $X$ et $Y$ deux v.a. discrètes à valeurs dans $\{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ et $\{y_j,\ j \in \mathbb{N}\}$. On suppose que $\mathbb{P}(X = x_i,\ Y = y_j) = u_i v_j$ pour tout $(i, j)$. Trouver les lois marginales et montrer que $X$ et $Y$ sont indépendantes.

2. Soient $X$ et $Y$ deux v.a. indépendantes et de même loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$. On pose $Z = Y - X$ et $M = \min(X, Y)$.

   (a) Montrer que si $m \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(M = m,\ Z = z) = \mathbb{P}(X = m - z)\,\mathbb{P}(Y = m), \qquad \text{si } z < 0,$$

$$\mathbb{P}(M = m,\ Z = z) = \mathbb{P}(X = m)\,\mathbb{P}(Y = m + z), \qquad \text{si } z \geq 0.$$

   (b) En déduire que , pour tout $(m, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(M = m,\ Z = z) = p^2(1-p)^{2m-2}(1-p)^{|z|}$. Montrer que $M$ et $Z$ sont indépendantes.

**Exercice 44.** Soit $X$ une v.a. positive. On peut définir l'espérance de $X$ en posant

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\, dt.$$

1. Montrer que, si $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$\sum_{i \geq 0} i\, \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}(X > i),$$

et en déduire l'adéquation des deux définitions dans ce cas.

2. Soit $X$ une v.a. positive de densité $p_X(x) = p(x)\mathbf{1}_{x>0}$. Montrer, à l'aide du théorème de Tonelli, que

$$\int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} x p_X(x)\, dx = \mathbb{E}[X].$$

3. Soit $X$ une v.a. de loi $\mathcal{E}xp(1)$. Déterminer la fonction de répartition de la v.a. $Y = \min(X, 1)$ puis calculer l'espérance de $Y$.

**Exercice 45.** Considérons la fonction $f(x, y) = y \exp\big(-(1 + x^2)y^2/2\big)\ \mathbf{1}_{x>0}\mathbf{1}_{y>0}$. En appliquant le théorème de Tonelli, montrer que

$$\int_0^\infty \exp(-x^2/2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \text{puis que} \qquad \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2/2)\, dx = \sqrt{2\pi}.$$

Soit $p(x, y) = k \exp\big(-(x^2 + y^2)/2\big)$. Calculer $k$ pour que $p$ soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les marginales d'un couple ayant $p$ pour densité. Est-ce surprenant ?

**Exercice 46.** Soit $Z = (X, Y)$ un couple de densité $p(x, y) = c\,(x+y)\mathbf{1}_{0<y-x<2}\mathbf{1}_{0<x<2}$. Calculer la constante $c$ puis déterminer les densités marginales. A-t-on indépendance ?

**Exercice 47.** Une étudiante donne rendez-vous à son ami entre 20 h. et 21 h. Les deux amis – à l'initiative du jeune homme qui est habitué à la ponctualité douteuse de sa copine mais redoute sa susceptibilité – conviennent de n'attendre pas plus de 15 minutes.

1. On suppose qu'ils arrivent indépendamment et à des instants uniformément distribués dans l'heure convenue.
   (a) Représenter graphiquement le domaine du plan où $|x - y| \leq 1/4$.
   (b) Quelle est la probabilité pour que les deux amis se rencontrent ?
2. Le jeune homme fixe son arrivée à l'heure $t$. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?

**Exercice 48.** Soient $X$ et $Y$ deux v.a. indépendantes de densités respectives $p$ et $q$. Trouver la densité de $S = X + Y$. Qu'obtient-on si $X$ et $Y$ suivent respectivement les lois $\mathcal{E}xp(\lambda)$ et $\mathcal{E}xp(\mu)$ ($\lambda > 0$, $\mu > 0$) ?

**Exercice 49.** Soit $Z = (X, Y)$ un couple aléatoire de densité $p$ donnée par $p(x, y) = ke^{-y}$ si $0 < x < y$ et $p(x, y) = 0$ sinon.

1. (a) Dessiner le domaine du plan sur lequel $p$ n'est pas nulle. Calculer $k$.
   (b) Déterminer les densités marginales de $Z$. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la loi de $T = Y - X$ puis celle de $R = X/Y$.

**Exercice 50.** Soient $U$ et $V$ deux v.a. indépendantes de loi uniforme sur $(0,1)$.

1. On pose $X = \sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V)$ et $Y = \sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V)$. Déterminer la loi du couple $(X,Y)$.

2. (a) Soit $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$u(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2}\right), \quad \text{si, } (x,y) \neq (0,0), \qquad u(0,0) = (0,0).$$

Montrer que $u$ est un $C^1$–difféomorphisme de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+^*$ dans $]-1,1[\times]0,+\infty[$.

(b) 0n pose $(S,T) = u(X,Y)$. Déterminez la loi de $(S,T)$. $S$ et $T$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 51.** Soit $(X,Y)$ un couple aléatoire de densité $p$. Déterminer la loi du couple $(M,m)$ où $M = \max(X,Y)$ et $m = \min(X,Y)$. Quelles sont les lois marginales ? Est-ce cohérent avec le cas de $(X,Y)$ v.a. indépendantes, de même loi ayant une fonction de répartition $F_X$ de classe $C^1$. Quelle est la loi du couple $(M+m, M-m)$ ?

**Exercice 52.** Soit $X = (X_1, X_2)^t$ un vecteur gaussien de moyenne $\mu = (1,0)^t$ et de matrice de variance-covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la fonction caractéristique de $X$, les lois marginales ainsi que celle de $2X_1 + 3X_2$.

2. $X$ possède-t-il une densité ? Si oui la calculer.

**Exercice 53 (2002, ex).** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ c'est à dire de densité $x \longmapsto \lambda\, e^{-\lambda x}\, \mathbf{1}_{x\geq 0}$.

Déterminer la fonction de répartition de $X$ puis la loi de la variable $Z = \min(X,Y)$.

**Solution.** Pour tout réel $x$, la fonction de répartition de $X$ est donnée par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \lambda\, e^{-\lambda t}\, \mathbf{1}_{t\geq 0}\, dt,$$

ce qui donne $F(x) = 0$ pour $x < 0$ et pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Déterminons la fonction de répartition de la variable $Z$. On a, pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = 1 - \mathbb{P}(\min(X,Y) > z) = 1 - \mathbb{P}(X > z, Y > z)\ ;$$

or $X$ et $Y$ sont indépendantes et de même loi donc

$$F_Z(z) = 1 - \mathbb{P}(X > z)^2 = 1 - (1 - F_X(z))^2,$$

ce qui donne, d'après le calcul de $F_X$,

$$\forall z \in \mathbb{R}, \qquad F_Z(z) = \left(1 - e^{-2\lambda z}\right) \mathbf{1}_{z\geq 0}.$$

$Z$ suit la loi exponentielle de paramètre $2\lambda$.

**Exercice 54 (2003, ex).** Soit $(X, Y)$ un couple aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k, Y = n) = (1 - q^n)\, q^{n(k-1)} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!},$$

avec $q \in ]0, 1[$, $\lambda > 0$.

Déterminer les lois de $X$ et de $Y$. Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

**Solution.** On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = k, Y = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} (1 - q^n) \sum_{k \geq 1} q^{n(k-1)} \ ;$$

or si $|z| < 1$, $\sum_{k \geq 1} z^{k-1} = 1/(1-z)$. Par suite, comme $q^{n(k-1)} = (q^n)^{k-1}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(Y = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.$$

C'est la loi d'une variable de Poisson à laquelle on ajoute 1.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X = k, Y = n) = e^{-\lambda} \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \left( q^{n(k-1)} - q^{nk} \right) ;$$

or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) := \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} x^n = x \sum_{i \geq 0} \frac{(x\lambda)^i}{i!} = x e^{x\lambda}$. Par suite,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \left( u(q^{k-1}) - u(q^k) \right) = e^{-\lambda} q^{k-1} \left( e^{\lambda q^{k-1}} - q e^{\lambda q^k} \right).$$

$X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes : la loi du couple n'est pas égal au produit des marginales.

**Exercice 55 (2001, ex).** Soit $p$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $p(x, y) = c \exp(-x)$ si $|y| < x$, $p(x, y) = 0$ sinon.

1. Représenter le domaine du plan sur lequel $p$ n'est pas nulle puis déterminer $c$ pour que $p$ soit une densité de probabilité.

2. Soit $(X, Y)$ un couple aléatoire de densité $p$. Déterminer les lois marginales. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 56 (2002, ex).** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes de loi normale i.e. de densité $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $R = X/Y$.

**Solution.** Soit $f$ une fonction continue par morceaux et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, calculons $\mathbb{E}[f(R)]$. On a :

$$\mathbb{E}[f(R)] = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x/y)\, e^{-x^2/2}\, e^{-y^2/2}\, dxdy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x/y)\, e^{-x^2/2}\, dx \right) dy.$$

Mais, posant $z = x/y$, on obtient, pour tout $y \neq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x/y)\, e^{-x^2/2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(z)\, |y| e^{-z^2 y^2/2}\, dz,$$

ce qui conduit à, via le théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}[f(R)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} \left( \int_{\mathbb{R}} f(z)\,|y| e^{-z^2y^2/2}\,dz \right) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) \left( \int_{\mathbb{R}} |y| e^{-(1+z^2)y^2/2}\,dy \right) dz.$$

On a de plus, pour tout réel $z$,

$$\int_{\mathbb{R}} |y| e^{-(1+z^2)y^2/2}\,dy = 2 \int_0^{+\infty} y e^{-(1+z^2)y^2/2}\,dy = 2 \left[ -\frac{1}{1+z^2} e^{-(1+z^2)y^2/2} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{1+z^2}\ ;$$

il s'en suit que

$$\mathbb{E}[f(R)] = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z)\,\frac{1}{1+z^2}\,dz.$$

$R$ a donc pour densité la fonction $z \longmapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+z^2}$ ; $R$ suit la loi de Cauchy.

**Exercice 57 (2003,ex).** Soit $(X,Y)$ un couple aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X=k, Y=n) = (1-q^n)\,q^{n(k-1)} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!},$$

avec $q \in ]0,1[$, $\lambda > 0$.

Déterminer les lois de $X$ et de $Y$. Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

**Solution.** On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y=n) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X=k, Y=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} (1-q^n) \sum_{k \geq 1} q^{n(k-1)}\ ;$$

or si $|z| < 1$, $\sum_{k\geq 1} z^{k-1} = 1/(1-z)$. Par suite, comme $q^{n(k-1)} = (q^n)^{k-1}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(Y=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.$$

C'est la loi d'une variable de Poisson à laquelle on ajoute 1.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X=k, Y=n) = e^{-\lambda} \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \left( q^{n(k-1)} - q^{nk} \right);$$

or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) := \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} x^n = x \sum_{i \geq 0} \frac{(x\lambda)^i}{i!} = x e^{x\lambda}$. Par suite,

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \left( u(q^{k-1}) - u(q^k) \right) = e^{-\lambda} q^{k-1} \left( e^{\lambda q^{k-1}} - q e^{\lambda q^k} \right).$$

$X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes : la loi du couple n'est pas égal au produit des marginales.

## 4. Théorèmes limites.

**Exercice 58.** Soit $X$ le nombre aléatoire d'avions arrivant en une heure sur un aéroport. On a estimé $\mathbb{E}[X] = 16$ et $\mathbb{V}[X] = 16$.

1. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev, donner une minoration de $\mathbb{P}(10 < X < 16)$.

2. Comparer le résultat avec celui obtenu en supposant que $X$ a pour loi $\mathcal{P}(16)$.

**Exercice 59.** En utilisant l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev, combien de fois doit-on lancer une pièce de monnaie pour que l'on ait une probabilité supérieure à 0,9 que le nombre de « pile » sur le nombre de lancers soit compris entre 0,4 et 0,6 ?

**Exercice 60.** Soit $X_n$ une v.a. de loi $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n)$ où $\mu_n$ converge vers $\mu$ et $\sigma_n$ converge vers $\sigma$. Quelle est la limite en loi de $X_n$ ?

**Exercice 61.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes, de carré intégrable et de même loi. On note $\mu = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = \mathbb{V}[X_1]$. On définit par récurrence :

$$Y_1 = X_1/2, \qquad Y_n = \big(Y_{n-1} + X_n\big)/2, \quad n \geq 2.$$

1. Calculer $\mathbb{E}[Y_n]$ et $\mathbb{V}[Y_n]$ en fonction de $n$, $m$ et $\sigma^2$.

2. Si $X_1$ suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, quelle est la loi de $Y_n$ ? Montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a. $Y$ que l'on précisera ?

**Exercice 62.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[-1/2, 1/2]$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = n + X_n$. Trouver la limite en loi de la suite $\big(n^{-2}\sum_{i=1}^n Y_i\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

**Exercice 63.** On observe des particules dont la durée de vie $X$ est une v.a. de loi $\mathcal{E}xp(\theta)$, $\theta > 0$.

1. Calculer la probabilité pour qu'une particule déterminée n'existe plus à l'instant $t > 0$.

2. $n$ particules sont dans une enceinte close ; leurs durées de vie sont indépendantes et de même loi $\mathcal{E}xp(\theta)$. On désigne par $N_t$ le nombre de particules qui ne sont pas désintégrées à l'instant $t$. Quelle est la loi de $N_t$ ? Calculer la moyenne et la variance de $N_t$. Étudier $\mathbb{V}[N_t]$ en fonction de $t$.

3. Démontrer que, si $n$ est assez grand, pour tout $\alpha$ de $]0, 1[$,

$$\mathbb{P}(N_t > \alpha n) \simeq \mathbb{P}(\xi > A(\alpha, t)\sqrt{n}),$$

où $\xi$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et $A$ est une fonction à déterminer.

4. Étudier $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(N_t > \alpha n)$. Si $t_0 = \ln(2)/\theta$, calculer $A(\alpha, t_0)$ et $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(N_{t_0} > n/2)$.

**Exercice 64 (2003, ex).** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Déterminer la densité de la variable aléatoire $Z = e^X$.

2. Calculer la fonction caractéristique du produit $XY$.

3. On définit $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

   (a) Quelle est la loi de $U$ ?

   (b) Calculer $Cov(U, V)$.

   (c) Soient $(U_i)_{i=1,2\ldots}$ une suite de variables i.i.d de même loi que $U$. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U_i^2 e^{-\frac{U_i^2}{4}}$$

**Solution.** 1. Soit $f$ une fonction continue par morceaux et bornée ; on a

$$\mathbb{E}[f(Z)] = \mathbb{E}\left[f\left(e^X\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(e^x\right) e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Le changement de variables $z = e^x$ i.e. $x = \ln z$, $dx = dz/z$, donne

$$\mathbb{E}[f(Z)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(z) e^{-\frac{(\ln z)^2}{2}} \frac{dz}{z} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-\frac{(\ln z)^2}{2}} \mathbf{1}_{z>0} \frac{dz}{z}.$$

La variable $Z$ a pour densité la fonction $z \longmapsto \mathbf{1}_{z>0}\, e^{-\frac{(\ln z)^2}{2}} / \sqrt{2\pi z^2}$.

2. On a, pour tout réel $t$, via le théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}\left[e^{itXY}\right] = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{itxy} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dxdy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{ityx} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \right) e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy.$$

Or, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ityx} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = e^{-\frac{t^2 y^2}{2}}.$$

Par suite, on obtient

$$\mathbb{E}\left[e^{itXY}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2y^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2(1+t^2)}{2}}\, dy,$$

et notant $\sigma = 1/\sqrt{1+t^2}$, il vient

$$\mathbb{E}\left[e^{itXY}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy = \sigma = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

3. (a) Comme $X$ et $Y$ sont deux gaussiennes indépendantes, leur somme, $U$, est une gaussienne de moyenne la somme des moyennes et de variance la somme des variances. $U$ a pour loi $\mathcal{N}(0,2)$.

(b) $U$ et $V$ sont toutes deux centrées. On a

$$Cov(U,V) = \mathbb{E}[UV] = \mathbb{E}\left[X^2 - Y^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[Y^2\right] = 0.$$

$U$ et $V$ sont décorrélées (en fait elles sont indépendantes car $(U,V)$ est un vecteur gaussien).

(c) La loi forte des grands nombres donne immédiatement le résultat :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U_i^2 e^{-\frac{U_i^2}{4}} = \mathbb{E}\left[U^2 e^{-\frac{U^2}{4}}\right].$$

Comme $U$ a pour loi $\mathcal{N}(0,2)$ on a

$$\mathbb{E}\left[U^2 e^{-\frac{U^2}{4}}\right] = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{4}} e^{-\frac{x^2}{4}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Exercice 65.** 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. définies sur un même espace convergeant vers un réel $x$ en probabilité. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\big(f(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f(x)$ en probabilité.

2. Soient $x \in [0,1]$, $\xi_n(x)$ une v.a. de loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$ et $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On pose,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1], \qquad \mathrm{B}_n(x) = \mathbb{E}\Big[f\big(n^{-1}\xi_n(x)\big)\Big].$$

(a) Montrer que $\mathrm{B}_n$ est un polynôme. Ce sont les polynômes de Bernstein.

(b) En utilisant l'inégalité de de Bienaymé–Tchebychev, montrer que,

$$\forall x \in [0,1], \quad \forall \eta > 0, \qquad \mathbb{P}\Big(\big|n^{-1}\xi_n(x) - x\big| \geq \eta\Big) \leq \frac{x(1-x)}{n\eta^2} \leq \frac{1}{4n\eta^2}.$$

(c) En remarquant, que, pour $x \in [0,1]$,

$$\big|\mathrm{B}_n(x) - f(x)\big| = \Big|\mathbb{E}\Big[f\big(n^{-1}\xi_n(x)\big)\Big] - \mathbb{E}\big[f(x)\big]\Big| \leq \mathbb{E}\Big[\big|f\big(n^{-1}\xi_n(x)\big) - f(x)\big|\Big],$$

montrer que $\big(\mathrm{B}_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f$ uniformément sur $[0,1]$. On pourra utiliser la partition suivante : $\big|n^{-1}\xi_n(x) - x\big| < \eta$, $\big|n^{-1}\xi_n(x) - x\big| \geq \eta$ et utiliser l'uniforme continuité de $f$.

3. Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $x \in [0,1]$, quelle est la loi de $S_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{U_i \leq x}$ ?

## 5. Autres exercices.

**Exercice 66.** Soient $\mathcal{E}$ une tribu sur $E$ et $X$ une application de $\Omega$ dans $E$. Montrer que $X^{-1}(\mathcal{E})$ est une tribu sur $\Omega$ qui rend $X$ mesurable. ($X^{-1}(\mathcal{E}) = \{X^{-1}(B),\ B \in \mathcal{E}\}$).

**Exercice 67.** Soit $n$ un entier non nul.

1. Montrer que, pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, $(1-z)^{-n} = \sum_{i\geq 0} \mathrm{C}_{i+n-1}^{n-1} z^i$.

2. Soient $\Omega = \{k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Pour $k \in \Omega$, on pose $\mathbb{P}(\{k\}) = \mathrm{C}_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$ où $0 < p < 1$. Montrer que $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité. (*Loi binomiale négative notée* $\mathcal{B}_-(n,p)$).

3. On dispose d'une pièce donnant pile avec probabilité $p \in ]0,1[$. Quelle est la probabilité d'obtenir $n$ fois pile à l'issue du $k^{\text{e}}$ lancer si on suppose les lancers indépendants ?

**Exercice 68.** Soient $\alpha$ un réel et $p$ la fonction réelle définie par

$$p(x) = \frac{\alpha}{(x-1)^2}, \quad \text{si } x < 0, \qquad p(x) = \alpha e^{-2x}, \quad \text{si } x \geq 0.$$

1. Calculer $\alpha$ pour que $p$ soit une densité de probabilité.

2. Déterminer la fonction de répartition $F$ associée à $p$.

3. Soit $X$ une v.a.r. de densité $p$. Déterminer la loi de la v.a. $Y = \mathrm{sgn}(X)$ avec $\mathrm{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$, $\mathrm{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$ et $\mathrm{sgn}(0) = 0$.

**Solution.** 1. Une densité de probabilité est une fonction $p$ positive telle que $\int_{\mathbb{R}} p(t)\,dt = 1$.

Dire que la fonction $p$ est positive revient à dire que le réel $\alpha$ est positif. Examinons la deuxième condition. On a :

$$\int_{\mathbb{R}} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} p(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} p(t)\,dt = \alpha \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{(t-1)^2} + \alpha \int_{0}^{+\infty} e^{-2t}\,dt.$$

$-1/(t-1)$ est une primitive de $1/(t-1)^2$ et $-e^{-2t}/2$ est une primitive de $e^{-2t}$ ; il vient

$$\int_{\mathbb{R}} p(t)\,dt = \alpha \left[\frac{-1}{t-1}\right]_{-\infty}^{0} + \alpha \left[\frac{-e^{-2t}}{2}\right]_{0}^{+\infty} = \alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{3\alpha}{2} \ ;$$

par suite $\alpha = 2/3$.

2. La fonction de répartition associée à $p$ est la fonction réelle définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt.$$

Comme $p$ est définie en « deux morceaux » on doit distinguer le cas $x < 0$ du cas $x \geq 0$. Pour $x < 0$, on obtient

$$F(x) = \alpha \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{(t-1)^2} = \alpha \left[\frac{-1}{t-1}\right]_{-\infty}^{x} = \frac{2}{3(1-x)}.$$

Pour $x \geq 0$, on a

$$F(x) = \alpha \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{(t-1)^2} + \alpha \int_{0}^{x} e^{-2t}\,dt = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\left[\frac{-e^{-2t}}{2}\right]_{0}^{x} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\left(e^{-2x} - 1\right) = 1 - \frac{1}{3}e^{-2x}.$$

3. $Y$ ne prend que trois valeurs : -1, 0 et 1 ; c'est donc une variable dicrète. Comme $X$ est absolument continue, $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. Donc $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$.

On a $\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(X < 0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = 2/3$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 0) = 1/3$.

**Exercice 69.** Pour $s \in \mathbb{R}$, calculer $\Lambda(s) = \mathbb{E}\big[\exp(sX)\big]$ quand $X$ a pour loi $\mathcal{N}(0,1)$ puis, sans refaire les calculs, quand $X$ a pour loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. (`Indic. : la loi de` $(X-\mu)/\sigma$ `est` $\mathcal{N}(0,1)$ `dans le second cas.`) Que valent $\Lambda'(0)$ et $\Lambda''(0) - \Lambda'(0)^2$ ?

**Solution.** On suppose d'abord que $X$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $s \in \mathbb{R}$.

$$\Lambda(s) = \mathbb{E}\big[\exp(sX)\big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(sx) \exp\big(-x^2/2\big)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\big\{-\big(x^2 - 2sx\big)/2\big\}\,dx.$$

Or $x^2 - 2sx = (x-s)^2 - s^2$ et donc

$$\Lambda(s) = \exp(s^2/2)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\big(-(x-s)^2/2\big)\,dx = \exp(s^2/2),$$

puisqu'on trouve l'intégrale de la densité d'une gaussienne $\mathcal{N}(s,1)$.

Si $X$ suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $Y = (X-\mu)/\sigma$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $X = \sigma Y + \mu$. Il vient

$$\Lambda(s) = \mathbb{E}\big[\exp\big(s(\sigma Y + \mu)\big)\big] = \exp(s\mu)\,\mathbb{E}\big[\exp\big((s\sigma)Y\big)\big] = \exp(s\mu)\exp\big(s^2\sigma^2/2\big),$$

d'après le calcul précédent puisque $Y$ est gaussienne centrée réduite.

On a, pour $s \in \mathbb{R}$,

$$\Lambda'(s) = (\mu + \sigma^2 s)\Lambda(s), \qquad \Lambda''(s) = \sigma^2\Lambda(s) + (\mu + \sigma^2 s)^2\Lambda(s).$$

Comme $\Lambda(0) = 1$, on a

$$\Lambda'(0) = \mathbb{E}[X] = \mu, \qquad \Lambda''(0) - \Lambda'(0)^2 = \mathbb{V}(X) = \sigma^2.$$

**Exercice 70.** Soit $X$ une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. (a) Calculer l'espérance et la variance de $X$.

(b) Pour $s < \lambda$, calculer $\Lambda(s) = \mathbb{E}\left[e^{sX}\right]$. Que valent $\Lambda'(0)$ et $\Lambda''(0)$ ?

2. Déterminer la densité de la v.a.r. $Y = \sqrt{X}$.

**Solution.** 1. (a) L'espérance et la variance de $X$ s'obtiennent par intégration par parties en faisant baisser le degré du polynôme ; en effet,

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} x\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda},$$

puis on obtient

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_0^{+\infty} x^2\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x\,e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda}\mathbb{E}[X] = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Par suite, $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$ et $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = 1/\lambda^2$.

(b) Soit $s < \lambda$, on a

$$\Lambda(s) = \mathbb{E}\left[e^{sX}\right] = \int_0^{+\infty} e^{sx}\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda\int_0^{+\infty} e^{(s-\lambda)x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda - s}.$$

Il vient alors,

$$\forall s < \lambda, \qquad \Lambda'(s) = \frac{\lambda}{(\lambda-s)^2}, \quad \Lambda''(s) = \frac{2\lambda}{(\lambda-s)^3},$$

d'où l'on déduit $\Lambda'(0) = \mathbb{E}[X] = \lambda^{-1}$ et $\Lambda''(0) = \mathbb{E}\left[X^2\right] = 2\lambda^{-2}$.

2. Prenons une fonction $f$ borélienne et bornée et calculons l'espérance de $f(Y)$ :

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \mathbb{E}\left[f\left(\sqrt{X}\right)\right] = \int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x}\right)\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^{+\infty} f(y)\,2\lambda y e^{-\lambda y^2}\,dy$$

via le changement de variables $y = \sqrt{x}$. $Y$ admet pour densité la fonction $y \longmapsto 2\lambda y e^{-\lambda y^2}\,\mathbf{1}_{y\geq 0}$.

**Exercice 71.** Soit $X$ une v.a. réelle de densité $p(x) = xe^{-x}\,\mathbf{1}_{x\geq 0}$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = e^X - 1$.

2. Déterminer la fonction caractéristique de $X$.

3. En déduire la moyenne et la variance de $X$.

4. Soit $Z$ une variable indépendante de $X$ et de même loi. Calculer l'espérance et la variance de $3X - 4Z$.

**Solution.** 1. Cherchons la densité de la variable $Y$ ; pour cela prenons une fonction $f$ continue par morceaux et bornée et calculons $\mathbb{E}[f(Y)]$. On a

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \mathbb{E}\left[f\left(e^X - 1\right)\right] = \int_0^{+\infty} f\left(e^x - 1\right)\,xe^{-x}\,dx\ ;$$

le changement de variables $y = e^x - 1$, soit $x = \ln(1+y)$ et $dx = dy/(1+y)$, conduit à

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \int_0^{+\infty} f(y)\,\frac{\ln(1+y)}{(1+y)^2}\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\frac{\ln(1+y)}{(1+y)^2}\,\mathbf{1}_{y\geq 0}\,dy.$$

$Y$ a pour densité la fonction $y \longmapsto \frac{\ln(1+y)}{(1+y)^2}\,\mathbf{1}_{y\geq 0}$.
2. Déterminons à présent la fonction caractéristique de $X$. Pour tout réel $t$, on a, à l'aide d'une intégration par parties, comme $\lim_{x\to+\infty} xe^{x(it-1)} = 0$,

$$\varphi(t) = \int_0^{+\infty} xe^{x(it-1)}\,dx = \left[x\frac{e^{x(it-1)}}{it-1}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{x(it-1)}}{it-1}\,dx = \left[-\frac{e^{x(it-1)}}{(it-1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(it-1)^2}.$$

3. Pour trouver la moyenne et la variance de $X$ on utilise la formule $\varphi^{(n)}(0) = i^n\,\mathbb{E}\left[X^n\right]$. Le calcul des dérivées donne :

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad \varphi'(t) = \frac{-2i}{(it-1)^3},\qquad \varphi"(t) = \frac{-6}{(it-1)^4},$$

et par suite, $\varphi'(0) = 2i$, $\varphi"(0) = -6$. Il vient alors

$$\mathbb{E}[X] = 2,\qquad \mathbb{E}\left[X^2\right] = 6,\qquad \mathbb{V}[X] = 6-4 = 2.$$

4. Comme $X$ et $Y$ sont de même loi, on a, par linéarité,

$$\mathbb{E}[3X-4Y] = 3\,\mathbb{E}[X] - 4\,\mathbb{E}[Y] = -\mathbb{E}[X] = -2,$$

et comme elles sont de plus indépendantes

$$\mathbb{V}[3X-4Y] = 9\,\mathbb{V}[X] + 16\,\mathbb{V}[Z] = 25\,\mathbb{V}[X] = 50.$$

**Exercice 72.** Soient $X$ une v.a. de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $Y$ une v.a. de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$ ; $X$ et $Y$ indépendantes. Déterminer la loi des v.a. $Z = XY$ et $S = X+Y$ ainsi que celle du couple $(Z,S)$. Les v.a. $Z$ et $S$ sont-elles indépendantes ?

**Solution.** Les v.a. $Z$ et $S$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(Z=n) = \mathbb{P}(Z=n,\,Y=0) + \mathbb{P}(Z=n,\,Y=1) = \mathbb{P}(Z=n,\,Y=0) + \mathbb{P}(X=n,\,Y=1);$$

lorsque $Y=0$ le produit $Z$ est toujours nul. Par suite, comme $X$ et $Y$ sont indépendantes,

$$\mathbb{P}(Z=n) = \mathbf{1}_{\{0\}}(n)\,\mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}(Y=1) = (1-p)\,\mathbf{1}_{\{0\}}(n) + p\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

De la même façon, notant $S = X+Y$, si $k\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(S=k) = \mathbb{P}(S=k,\,Y=0) + \mathbb{P}(S=k,\,Y=1) = \mathbb{P}(X=k,\,Y=0) + \mathbb{P}(X=k-1,\;Y=1),$$

et par indépendance on obtient

$$\mathbb{P}(S=k) = (1-p)\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + p\,\mathbf{1}_{\mathbb{N}^*}(k)\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

Pour la loi du couple, on utilise la même démarche : si $(n,k)\in\mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=n,\,S=k) &= \mathbb{P}(Z=n,\,S=k,\,Y=0) + \mathbb{P}(Z=n,\,S=k,\,Y=1)\\ &= \mathbb{P}(Z=n,\,X=k,\,Y=0) + \mathbb{P}(X=n,\,X=k-1,\,Y=1).\end{aligned}$$

Le premier terme est nul dès que $n > 0$ et le second est nul dès que $n \neq k-1$. On obtient finalement, par indépendance, pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=n,\, S=k) &= \mathbf{1}_{\{0\}}(n)\,\mathbb{P}(X=k,\, Y=0) + \mathbf{1}_{\{1\}}(k-n)\,\mathbb{P}(X=n,\, Y=1)\\ &= \mathbf{1}_{\{0\}}(n)\,(1-p)\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + \mathbf{1}_{\{1\}}(k-n)\,p\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\end{aligned}$$

Les v.a. $Z$ et $S$ ne sont pas indépendantes.

**Exercice 73.** Pour $a > 0$, $b > 0$, on définit

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx, \qquad \text{et,} \quad \mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx.$$

Montrer que $\Gamma(a)\Gamma(b) = \mathrm{B}(a,b)\Gamma(a+b)$.

**Solution.** Notons tout d'abord, que si $a > 0$ et $b > 0$, le critère de Riemann en 0 assure que $\Gamma(a) < \infty$, $\Gamma(b) < \infty$ et $\mathrm{B}(a,b) < \infty$. Ensuite,

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx \int_0^\infty e^{-y}y^{a-1}\,dy = \iint_{]0,\infty[^2} e^{-(x+y)}x^{a-1}y^{b-1}\,dxdy.$$

Notons $I$ cette dernière intégrale.

On effectue le changement de variables $(s,t) = \big(x+y, x/(x+y)\big)$. Introduisons pour cela la fonction $u : ]0,\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $u(x,y) = \big(x+y, x/(x+y)\big)$ et montrons que $u$ est un $C^1$–difféomorphisme sur $]0,\infty[^2$. Il est clair que $u$ est de classe $C^1$ sur l'ouvert $]0,\infty[^2$ de $\mathbb{R}^2$. Il s'agit de vérifier que $u$ est injective sur $]0,\infty[^2$ et que $\mathrm{J}u(x,y) \neq 0$ si $(x,y) \in ]0,\infty[^2$. Si $u(x,y) = u(x',y')$ on a $x+y = x'+y'$ et $\frac{x}{x+y} = \frac{x'}{x'+y'}$ d'où l'on déduit immédiatement $x = x'$ puis $y = y'$. D'autre part, on a

$$\mathrm{J}u(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{y}{(x+y)^2} & \dfrac{-x}{(x+y)^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x+y},$$

qui est bien sûr non nul sur $]0,\infty[^2$. Il en résulte que $u$ est un $C^1$–difféomorphisme de $]0,\infty[^2$ sur $u\big(]0,\infty[^2\big)$ que nous devons déterminer. Si $x$ et $y$ sont strictement positifs on a $x < x+y$ de sorte que $u\big(]0,\infty[^2\big) \subset ]0,\infty[\times]0,1[$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $(s,t) \in ]0,\infty[\times]0,1[$ et cherchons $(x,y) \in ]0,\infty[^2$ tel que $u(x,y) = \Big(x+y, \frac{x}{x+y}\Big) = (s,t)$ ; on obtient facilement que $(x,y) := (st, s(1-t))$ appartient à $]0,\infty[^2$ et satisfait à $u(x,y) = (s,t)$. (On vient d'inverser $u$). D'où $u\big(]0,\infty[^2\big) = ]0,\infty[\times]0,1[$.

On calcule $I$ – la fonction à intégrer est positive et intégrable – à l'aide du changement de variables $(s,t) = u(x,y)$. Pour cela on exprime $e^{-(x+y)}x^{a-1}y^{b-1}/|\mathrm{J}u(x,y)|$ en fonction des nouvelles coordonnées en faisant apparaitre $x+y$ :

$$\frac{e^{-(x+y)}x^{a-1}y^{b-1}}{\big|\mathrm{J}u(x,y)\big|} = e^{-(x+y)}x^{a-1}y^{b-1}(x+y) = e^{-(x+y)}\left(\frac{x}{x+y}\right)^{a-1}\left(\frac{y}{x+y}\right)^{b-1}(x+y)^{a+b-1}\ ;$$

comme $y/(x+y) = 1 - x/(x+y)$, on a

$$\frac{e^{-(x+y)}x^{a-1}y^{b-1}}{\big|\mathrm{J}u(x,y)\big|} = e^{-(x+y)}x^{a-1}y^{b-1}(x+y) = e^{-s}t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}\,s^{a+b-1},$$

et on obtient finalement

$$I = \int_{]0,\infty[\times]0,1[} e^{-s} s^{a+b-1} t^{a-1} (1-t)^{b-1} \, ds dt = \int_0^\infty e^{-s} s^{a+b-1} \, ds \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} \, dt$$

soit encore

$$I = \Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\mathrm{B}(a,b).$$