Rappels d'Analyse.

Commençons ces rappels par deux lemmes sur les séries numériques.

Soient $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de réels strictement positifs – on pose $b_0 = 0$ – vérifiant $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ et $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels.

Lemme de Césaro. Si $\lim_{n\to+\infty} x_n = x \in \mathbf{R}$, alors $\lim_{n\to+\infty} b_n^{-1} \sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1})x_i = x$.

Lemme de Kronecker. Si la série $\sum b_n^{-1} x_n$ converge dans $\mathbf{R}$, alors $\lim_{n\to+\infty} b_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Démonstration. Établissons le lemme de Césaro. Notons $u_n = b_n^{-1} \sum_{i\leq n}(b_i - b_{i-1})x_i - x$ et observons que

$$|u_n| = \left|b_n^{-1} \sum\nolimits_{i\leq n}(b_i - b_{i-1})(x_i - x)\right| \leq b_n^{-1} \sum\nolimits_{i\leq n}(b_i - b_{i-1})|x_i - x|.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente dans $\mathbf{R}$ donc bornée disons par x^*. On a alors pour tous $n \geq 1$, $k \geq 1$,

$$|u_{n+k}| \leq 2x^*\, b_{n+k}^{-1} b_k + b_{n+k}^{-1}(b_{n+k} - b_k) \sup_{i\geq k+1} |x_i - x| \leq 2x^*\, b_{n+k}^{-1} b_k + \sup_{i\geq k+1} |x_i - x|.$$

Par conséquent, pour tout $k \geq 1$,

$$\limsup |u_n| = \limsup_{n\to+\infty} |u_{n+k}| \leq \sup_{i\geq k+1} |x_i - x|.$$

Il reste à prendre la limite lorsque k tend vers $+\infty$ pour conclure.

Passons à la démonstration du lemme de Kronecker. Notons $R_i = \sum_{k\geq i} b_k^{-1} x_k$; par hypothèse $\lim_{i\to+\infty} R_i = 0$. On a $b_i(R_i - R_{i+1}) = x_i$ de sorte que, comme $b_0 = 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} b_i(R_i - R_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} b_i R_i - \sum_{i=1}^{n+1} b_{i-1} R_i = \sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1})R_i - b_n R_{n+1}.$$

Il reste à diviser par b_n et appliquer le lemme de Césaro pour conclure. □

Poursuivons par un résultat élémentaire.

Lemme 1. *Soit* $(z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *une suite de complexes. Si* $\lim_{n\to+\infty} nz_n = z$, *alors* $\lim_{n\to+\infty}(1 + z_n)^n = e^z$.

Démonstration. Notons $w_n = e^{\frac{z}{n}}$. On a

$$(1 + z_n)^n - e^z = (1 + z_n)^n - w_n^n = (1 + z_n - w_n) \sum_{k=0}^{n-1}(1 + z_n)^{n-1-k} w_n^k \ ;$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} &|(1 + z_n)^n - e^z| \\ &\quad\leq\ n\ |1 + z_n - w_n|\ \sup\nolimits_{k\leq n-1} \left\{ |1 + z_n|^{n-1-k}\, |w_n|^k \right\} \leq n\ |1 + z_n - w_n|\ (1 + |z_n|)^n\, e^{|z|}, \end{aligned}$$

et, comme $\ln(1+x) \le x$ pour tout $x > -1$,

$$|(1+z_n)^n - e^z| \le n\ |1+z_n-w_n|\ e^{n|z_n|+|z|}.$$

On a d'autre part, pour tout $|z| \le 1$,

$$|e^z - 1 - z| = \left|\sum\nolimits_{n\ge 2} \frac{z^n}{n!}\right| \le |z|^2 \sum_{n\ge 2} \frac{1}{n!} \le |z|^2 \sum_{n\ge 2} 2^{-(n-1)} = |z|^2.$$

Il vient alors, pour tout $n \ge |z|$, $|1+z_n-w_n| \le |z_n - z/n| + |z|^2/n^2$, et par suite

$$|(1+z_n)^n - e^z| \le \left(|nz_n - z| + n^{-1}|z|^2\right) e^{n|z_n|+|z|}.$$

Le résultat s'en suit immédiatement. $\square$

Terminons ces rappels par une *version probabiliste* du lemme de Dini.

Proposition 2. *Soient $(F_n)_{n\ge 1}$ et F des fonctions de répartition avec F continue sur $\mathbf{R}$.*

Si $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers F sur $\mathbf{R}$, alors la convergence est uniforme sur $\mathbf{R}$.

Démonstration. Fixons $a > 0$. Notons, pour $i = 1, \dots, p+1$, $t_i = -a + (i-1)2a/p$ et, pour $r > 0$, $\omega_F(r) = \sup_{|t-s|\le r} |F(t) - F(s)|$.

Puisque, F et F_n sont des fonctions de répartition,

– si $t < t_1$, $F(t) - F_n(t) \le F(t_1)$ et

$$F_n(t) - F(t) \le F_n(t_1) \le |F_n(t_1) - F(t_1)| + F(t_1).$$

– Si $t \in [t_{i-1}, t_i[$, $i = 2, \dots, p$,

$$F(t) - F_n(t) \le F(t_i) - F_n(t_{i-1}) \le |F(t_i) - F(t_{i-1})| + |F(t_{i-1}) - F_n(t_{i-1})|,$$

$$F_n(t) - F(t) \le F_n(t_i) - F(t_{i-1}) \le |F_n(t_i) - F(t_i)| + |F(t_i) - F(t_{i-1})|.$$

– Finalement, si $t \ge t_{p+1}$, $F_n(t) - F(t) \le 1 - F(t_{p+1})$ et

$$F(t) - F_n(t) \le 1 - F_n(t_{p+1}) \le 1 - F(t_{p+1}) + |F(t_{p+1}) - F_n(t_{p+1})|.$$

Par conséquent,

$$\|F - F_n\|_\infty \le \max\{1 - F(a), \omega_F(2a/p), F(-a)\} + \max\{|F_n(t_i) - F(t_i)| : i = 1, \dots, p+1\}$$

et donc, puisque F_n converge simplement vers F,

$$\limsup_{n\to+\infty} \|F - F_n\|_\infty \le \max\{1 - F(a), \omega_F(2a/p), F(-a)\}.$$

F est uniformément continue sur $\mathbf{R}$ puisque c'est une fonction continue possédant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$; donc $\lim_{r\to 0^+} \omega_F(r) = 0$.

Il reste à faire tendre p puis a vers $+\infty$. $\square$

Remarque. Sous les hypothèses de la proposition précédente, $F_n(t-)$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers $F(t)$. En effet, pour tous $s < t$,

$$|F_n(s) - F(t)| \le 2\,\|F - F_n\||_\infty + |F(s) - F(t)|$$

et donc si $s \uparrow t$,

$$|F_n(t-) - F(t)| \le 2\,\|F - F_n\||_\infty.$$