UFR Mathématiques
Université Rennes I

Maîtrise de Mathématiques/MIM
Année 2003/2004

Module PRB1 : Probabilités de base.

Examen 2e session : durée trois heures.

Documents autorisés : polycopié et notes personnelles de cours.

Jeudi 2 septembre 2004.

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. On pose $Y = \sup_{n\geq 1} X_n$ et on désigne par A l'événement $A = \{Y = +\infty\}$.

1. On pose, pour tout $p \geq 1$, $Y_p = \sup_{n\geq p} X_n$.
   (a) Montrer que, pour $p \geq 1$, $A = \{Y_p = +\infty\}$.
   (b) L'événement A est-il un événement asymptotique de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$?
2. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n > c) < +\infty$. Calculer $\mathbb{P}(A)$.
3. On suppose désormais les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes.
   (a) Quelles valeurs peut prendre $\mathbb{P}(A)$?
   (b) Montrer que s'il existe un réel c tel que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n > c) = +\infty$ alors $Y \geq c$ presque sûrement.
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées, de carré intégrable, telle que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] = 1$.

Pour $n \geq 1$, on pose

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad R_n = \frac{|S_n|}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que $(R_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on déterminera la densité. Vérifier que $\mathbb{E}[Z] = \sqrt{2}/\sqrt{\pi}$.

Pour $l \geq 1$, on pose $\varphi_l(x) = \min(x, l)\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

2. (a) Justifier que, pour tout $l \geq 1$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\varphi_l(R_n)] = \mathbb{E}[\varphi_l(Z)]$.
   (b) Établir, pour $l \geq 1$ et $n \geq 1$, les quatre relations suivantes

$$\big|\mathbb{E}[R_n] - \mathbb{E}[\varphi_l(R_n)]\big| \leq \mathbb{E}\left[R_n\, \mathbf{1}_{\{R_n \geq l\}}\right] \leq \frac{1}{l}\, \mathbb{E}\left[R_n^2\right] = \frac{1}{l}.$$

3. (a) Prouver que, pour tout $l \geq 1$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \left|\mathbb{E}[R_n] - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right| \leq \frac{1}{l} + \big(\mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[\varphi_l(Z)]\big).$$

   (b) Conclure.

T.S.V.P.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$ indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $\mathbb{P}(X_1=1)=\mathbb{P}(X_1=-1)=1/2$.

On pose $S_0=0$ et, pour tout $n\geq 1$, $S_n=X_1+\ldots+X_n$. Soit α un réel strictement positif ; on considère

$$M_0=1, \qquad M_n=(\operatorname{ch}\alpha)^{-n}e^{\alpha S_n}, \quad n\geq 1.$$

1. (a) Pour tout $n\geq 1$, calculer $\mathbb{E}[M_n]$.

   (b) Montrer que $(M_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

Indication : on pourra écrire $M_n=\exp(\alpha S_n - n\ln\operatorname{ch}\alpha)$.

   (c) La convergence a-t-elle lieu dans L^1 ?

2. On pose $T=\inf\{n\geq 1 : S_n=1\}$.

   (a) Vérifier que $\left\{\limsup_{n\to+\infty} S_n=+\infty\right\}\subset\{T<+\infty\}$.

   (b) Quelles valeurs peut prendre $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} S_n=+\infty\right)$?

   (c) Soit $a>0$. Établir les inégalités

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} S_n=+\infty\right)\geq\mathbb{P}\left(\limsup\left\{S_n\geq a\sqrt{n}\right\}\right)\geq\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(S_n\geq a\sqrt{n}\right)=1-\Phi(a),$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$.

   (d) En déduire que, presque sûrement, $\limsup_{n\to+\infty} S_n=+\infty$ et que T est fini presque sûrement.

3. On pose, pour tout $n\geq 1$, $Z_n=M_{n\wedge T}$ c'est à dire

$$\forall\omega\in\Omega, \qquad Z_n(\omega)=M_{\min(n,T(\omega))}(\omega).$$

   (a) Montrer que si $T(\omega)<+\infty$ $(Z_n(\omega))_{n\geq 1}$ converge vers $e^{\alpha}(\operatorname{ch}\alpha)^{-T(\omega)}$.

   (b) Établir l'inégalité $\sup_{n\geq 1}|Z_n|\leq e^{\alpha}$ et en déduire que la convergence précédente a lieu également dans L^1.

4. (a) Montrer que, pour tout $k\geq 1$, les variables aléatoires $\mathbf{1}_{\{k\leq T\}}M_{k-1}$ et M_k/M_{k-1} sont indépendantes.

   (b) Vérifier que

$$Z_n=M_0+\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{\{k\leq T\}}M_{k-1}\left(M_k/M_{k-1}-1\right)$$

puis montrer que, pour tout $n\geq 1$, $\mathbb{E}[Z_n]=1$.

   (c) En déduire que $\mathbb{E}\left[(\operatorname{ch}\alpha)^{-T}\right]=e^{-\alpha}$.

5. Déterminer la fonction génératrice de T.

UFR Mathématiques
Université Rennes I

Maîtrise/MIM
Année 2003/2004

Module PRB1 : Correction de l'examen.

Exercice 1.

Exercice 2.

Exercice 3.